

# 12

## COMPORTAMENTO IN FREQUENZA DEI CIRCUITI REAZIONATI

- 12.1 *Introduzione*
- 12.2 *Calcolo dei poli in un circuito retroazionato*
  - 12.2.1 *Luogo delle radici : caso di 1 polo in  $G_{loop}(s)$*
  - 12.2.2 *Luogo delle radici : caso di 1 polo e di 1 zero in  $G_{loop}(s)$*
  - 12.2.3 *Circuiti retroazionati utilizzando un OTA (Operational Transconductance Amplifier)*
- 12.3 *Circuiti con Operazionali: polo nel ramo di andata  $A(s)$* 
  - 12.3.1 *La rappresentazione compatta di Bode*
- 12.4 *Circuiti retroazionati con più poli*
  - 12.4.1 *Luogo delle radici : trattazione generale*
  - 12.4.2 *Regole di tracciamento del luogo*
- 12.5 *Rumore RMS in un circuito retroazionato*
- 12.6 *Condizioni di stabilità*
  - 12.6.1 *Stabilità e luogo delle radici*
  - 12.6.2 *Il criterio di stabilità di Bode*
  - 12.6.3 *Come controllare le sovraoscillazioni in un sistema stabile*
  - 12.6.4 *Differenze tra uso del diagramma di Bode e del luogo delle radici*
- 12.7 *Stabilità e tecniche di compensazione*
  - 12.7.1 *Stabilizzazione in frequenza con modifica dei poli*
  - 12.7.2 *Stabilizzazione in frequenza con reti sfasatrici*
- 12.8 *Effetto sulla stabilità di carichi capacitivi*
  - 12.8.1 *Effetto di un carico capacitivo in uscita*
  - 12.8.2 *Effetto di un carico capacitivo in ingresso*
- 12.9 *Instabilità utili: l'oscillatore sinusoidale*
- 12.10 *Il ritardo di propagazione del segnale lungo l'anello*

## 12.1 INTRODUZIONE

La presenza di condensatori o di induttori rende il comportamento di un circuito retroazionato dipendente dalla frequenza come sappiamo succedere in un qualunque circuito elettronico. Per caratterizzarne il comportamento dovremo quindi sapere individuarne i poli e gli zeri, disegnare i diagrammi di Bode della sua funzione di Trasferimento e tracciare la risposta temporale ad un determinato impulso applicato al suo ingresso.

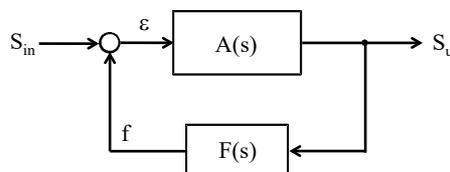
La particolarità nell'analisi di un circuito retroazionato è che ne abbiamo modellizzato l'architettura come nello schema della Fig.12.1, individuando una parte di circuito,  $A(s)$ , che svolge il ruolo di amplificatore di "andata" ed una parte di circuito,  $F(s)$ , che permette il ritorno del segnale dall'uscita all'ingresso per attuare un controllo. Cercheremo in questo capitolo di continuare a fare tesoro di questa modellizzazione per comprendere in modo intuitivo ma rigoroso come si comporta in frequenza un circuito retroazionato, evitando di considerare quest'ultimo come una impersonale rete elettrica da risolvere con i bilanci ai nodi ed alle maglie come invece fanno i programmi di simulazione al computer.

Riprendendo quindi l'espressione della funzione di trasferimento reale di un circuito retroazionato come desunta dalla Fig.12.1 :

$$G(s) = G_{id}(s) \frac{-G_{loop}(s)}{1-G_{loop}(s)} + G_{dir}(s) \frac{1}{1-G_{loop}(s)} \quad (12.1)$$

ci occuperemo di trarne tutte le informazioni di interesse nel caso ora in cui ci siano elementi reattivi nel ramo di andata  $A(s)$  e/o nel ramo di retroazione  $F(s)$ , cioè quindi non solo in  $G_{loop}(s)$  ma anche eventualmente già in  $G_{id}(s)$  o addirittura in  $G_{dir}(s)$ . Solo il caso in cui l'elemento reattivo stia nel ramo  $F(s)$  di retroazione è già stato parzialmente visto nel Cap.10 perché la singolarità è già presente nel  $G_{id}(s)$  del circuito e quindi abbiamo già una guida, sebbene "ideale", al tracciamento dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento.

In questo capitolo analizzeremo in dettaglio tutte le situazioni possibili di



**Fig. 12.1** Schema della reazione con un amplificatore di andata  $A(s)$ , supposto rigorosamente unidirezionale, ed una rete di retroazione  $F(s)$  genericamente bidirezionale, entrambi funzione della frequenza.

posizionamento dei condensatori nel circuito ed affineremo gli strumenti logici e matematici per comprenderne il comportamento in frequenza di un circuito retroazionato qualunque sia il suo grado di complessità.

Rifletteremo anche sul fatto che la presenza di elementi reattivi può rendere addirittura instabile un circuito. Per intuire questo aspetto ricordiamoci che un amplificatore è stato classificato come reazionato negativamente quando il segno del suo guadagno d'anello è negativo. Questa condizione esprime il fatto che il segnale di reazione “ritorna” al nodo d'ingresso in controfase con il segnale applicato e si opponga ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) alla variazione del segnale di comando dell'amplificatore d'andata  $A(s)$ . Quando lungo l'anello sono presenti elementi reattivi, lo sfasamento da loro introdotto può essere tale che il segnale di reazione ritorni al nodo sommatore in fase con il segnale applicato e la reazione diventi positiva. Se il guadagno d'anello a questa frequenza fosse maggiore di uno, il segnale sarebbe amplificato nel circolare nell'anello e quindi il sistema diventerebbe instabile, con l'ampiezza del segnale in uscita che continuerebbe ad aumentare fino a che gli elementi attivi non saturano (e basterebbe il solo rumore dei componenti elettronici per innescare questo fenomeno !).

## 12.2 CALCOLO DEI POLI IN UN CIRCUITO RETROAZIONATO

Indipendentemente da dove stia la capacità in un circuito, se cioè sia posta nel ramo di retroazione  $F(s)$  oppure nel ramo di andata  $A(s)$ , si rifletta sul fatto che i poli della funzione di trasferimento  $G(s)$  come espressa dalla (12.1) dovranno essere le radici dell'equazione a denominatore :

$$1 - G_{loop}(s) = 0 \quad \text{cioè} \quad G_{loop}(s) = 1 \quad (12.2)$$

L'equazione (12.2) è complessa nella variabile  $s = \alpha + j\omega$  e pertanto è risolta quando

- i) le parti reali ed i coefficienti delle parti immaginarie coincidono, oppure
- ii) i moduli e gli argomenti coincidono.

Quest'ultima strada è preferita in elettronica per via della nostra abitudine alla visualizzazione nei diagrammi di Bode. Essa si traduce nelle due condizioni :

$$\begin{cases} \arg[G_{loop}(s)] = \arg[1] & (12.3a) \\ |G_{loop}(s)| = 1 & (12.3b) \end{cases}$$

Vediamo cosa questo significhi nella pratica. E' interessante comunque notare fin d'ora che *per calcolare con precisione i poli di un circuito retroazionato possa bastare la sola conoscenza di  $G_{loop}(s)$*  che abbiamo visto essere ricavabile in modo rigoroso e preciso.

### 12.2.1 Luogo delle radici : caso di 1 polo in $G_{loop}(s)$

Vediamo il caso introduttivo in cui ci sia un solo condensatore nel circuito, che dia luogo ad una espressione di  $G_{loop}(s)$  con solo un polo e nessuno zero :

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{1}{1+s\tau}$$

La condizione (12.2) si esplicita come:

$$\frac{G_{loop}(0)}{\tau} \cdot \frac{1}{s - (-1/\tau)} = 1 \quad (12.4)$$

in cui si è evidenziato il polo  $p = -1/\tau$  del guadagno d'anello.

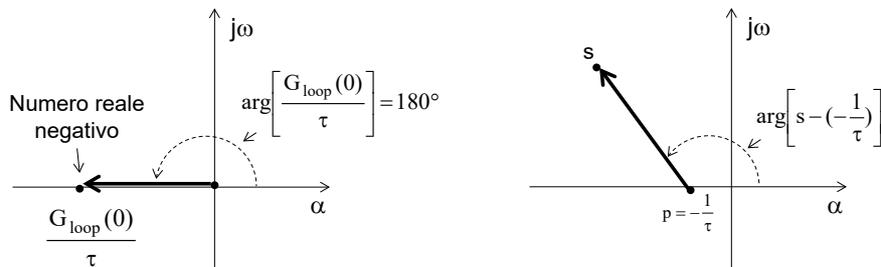
In questo caso, **l'equazione degli argomenti** (12.3a) diventa:

$$\arg \left[ \frac{G_{loop}(0)}{\tau} \right] - \arg \left[ s - \left( -\frac{1}{\tau} \right) \right] = 0^\circ \quad (12.5)$$

Rappresentando come vettori su un piano complesso ( $\alpha, j\omega$ ) gli elementi complessi dell'equazione, come si vede nella Fig.12.2, il primo termine vale  $180^\circ$  perché è l'argomento di un numero reale negativo ( $G_{loop}(0) < 0$  quando la reazione è negativa), mentre il secondo termine corrisponde all'angolo formato con l'asse orizzontale dal segmento congiungente un punto  $s$  del piano a  $p = -1/\tau$  :

$$180^\circ - \arg \left[ s - \left( -\frac{1}{\tau} \right) \right] = 0^\circ$$

Per soddisfare l'equazione questo angolo deve essere di  $180^\circ$ . Perciò è facile rendersi conto che il **luogo dei poli** del circuito reazionato (detto anche **luogo delle radici** dell'equazione (12.2)), cioè dei punti  $s$  che soddisfano la (12.3a), è costituito da tutti i punti dell'asse reale posti a sinistra di  $p = (-1/\tau)$ , rappresentato dalla linea marcata nella Fig.12.3.



**Fig. 12.2** Rappresentazione vettoriale sul piano complesso di un numero reale negativo (sinistra) e della differenza tra un numero complesso "s" generico ed il polo  $p$  del  $G_{loop}$  del circuito.

L'effettiva posizione del polo  $p^*$  del circuito retroazionato è quella che soddisfa anche la **condizione sul modulo** (12.3b)

$$|G_{loop}(0)| \cdot \frac{1}{\tau} \frac{1}{|s - (-1/\tau)|} = 1 \quad (12.6)$$

dove (vedi Fig.12.3)

- $|1/\tau|$  corrisponde alla distanza tra il punto  $p=-1/\tau$  e l'origine degli assi;
- il denominatore  $|s-(-1/\tau)|$  individua la distanza tra il generico punto  $s$  del luogo ed il punto  $(-1/\tau)$ .

Il valore di “s” che soddisfa la condizione sui moduli (cioè il polo  $p^*$  del circuito reazionato che stiamo cercando) si troverà perciò ad una distanza da  $p=-1/\tau$  pari a

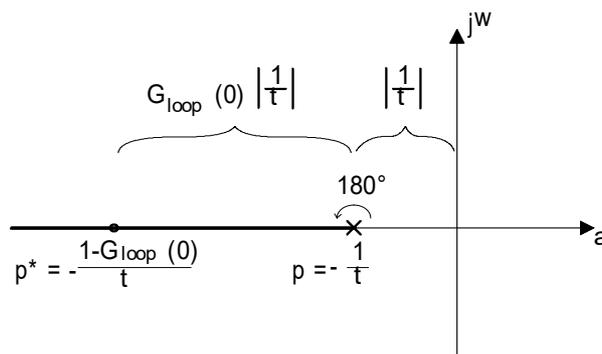
$$\left|s - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right| = \left|-\frac{1}{\tau}\right| \cdot |G_{loop}(0)|$$

e quindi in una posizione assoluta rispetto all’origine degli assi pari a:

$$p^* = \left|s - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right| + \left|-\frac{1}{\tau}\right| = \left|-\frac{1}{\tau}\right| \cdot (1 + |G_{loop}(0)|) \quad (12.7)$$

Nella Fig.12.3 sono riportati il polo  $p$  del guadagno di anello del circuito ed il polo  $p^*$  del circuito reazionato, entrambi reali e negativi. Quest'ultimo al variare di  $G_{loop}(0)$  assume un valore tra quelli sull'asse reale alla sinistra di  $p$ .

Se ne deduce che in un circuito retroazionato che *abbia solo un polo nell’espressione del suo guadagno di anello, la retroazione rende il circuito più*



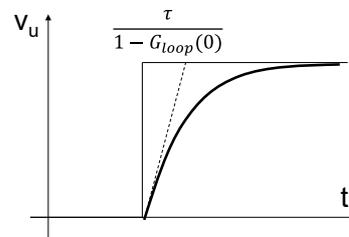
**Fig. 12.3** La linea marcata rappresenta sul piano complesso le possibili soluzioni (radici) dell’equazione (12.4). Evidenziati sono il polo  $p$  del  $G_{loop}$  del circuito ed il polo  $p^*$  del circuito reazionato, quest’ultimo ad una frequenza  $(1-G_{loop}(0))$  volte più elevata della frequenza fisica dovuta alla capacità prima che la retroazione intervenga.

**veloce nella risposta estendendone la banda passante.** Questo miglioramento nelle prestazioni è tanto maggiore quanto maggiore è la forza della retroazione, cioè quanto più grande è il valore di  $G_{loop}(0)$ , secondo la (12.6).

Addirittura, se il circuito fosse idealmente retroazionato ( $G_{loop}(0)=\infty$ ), il circuito avrebbe banda infinita, nella pratica limitata da altri componenti del circuito ora trascurati. Viceversa per  $G_{loop}(0)=0$  la banda sarebbe quella iniziale del circuito madre senza la retroazione attiva, con il polo del circuito che viene a coincidere con quello di  $G_{loop}(s)$  evidenziando il fatto che il circuito non beneficia in alcun modo della retroazione.

In conclusione : all'aumentare di  $|G_{loop}(0)|$ , chiamato anche *parametro di taratura*, il luogo delle radici ha origine dal polo di  $G_{loop}(s)$  e giunge allo zero di  $G_{loop}(s)$ , eventualmente posto all'infinito. Si può dire che il luogo è respinto dai poli ed è attratto dagli zeri. Un fissato valore di  $|G_{loop}(0)|$  determina un punto esatto sul luogo che corrisponde al polo del circuito reazionato con quel  $G_{loop}(0)$ .

Il luogo della Fig.12.3 ci mostra chiaramente che il polo del circuito reazionato è sempre reale e negativo, evidenziando un circuito sempre stabile che risponde ad una sollecitazione all'ingresso con una risposta esponenziale di cui si conosce perfettamente la costante di tempo.



L'analisi appena fatta sottolinea l'importanza del Guadagno di Anello e quanto il calcolo preciso del polo del circuito reazionato si basi sulla **solita conoscenza della funzione  $G_{loop}(s)$** , senza necessità di individuare ed isolare  $A(s)$  o  $F(s)$  od altri elementi del circuito.

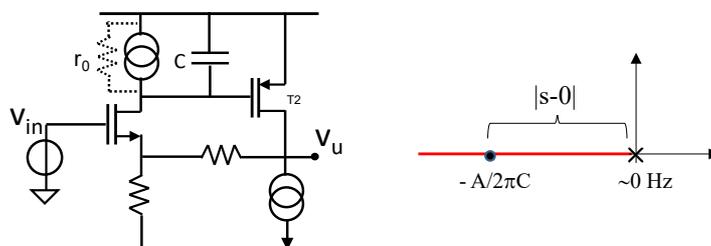
### Caso particolare di $G_{loop}(0) = \infty$

Sappiamo che per avere un guadagno di tensione infinito in un punto di un circuito dobbiamo far sì che l'impedenza in quel punto sia infinita, ad esempio con un carico attivo (generatore di corrente) ideale :  $r_0 = \infty$ . Se questo nodo lo trovassimo lungo un anello avremmo  $G_{loop}(0) = -Ar_0 = -\infty$ . Questo però non necessariamente ci deve indurre a concludere che il polo del circuito retroazionato stia a frequenza infinita !

Infatti, se in quello stesso punto dell'anello ci fosse una capacità C verso massa, avremmo anche un polo di  $G_{loop}(s)$  a  $f = 1/(2\pi C r_0) = 0$  Hz. Per vedere dove si trova il polo del circuito retroazionato, esplicitiamo la condizione sul modulo (12.6) :

$$|A \cdot r_0| \cdot \left| \frac{1}{2\pi C \cdot r_0} \right| \cdot \frac{1}{|s - 0|} = 1$$

in cui il termine  $r_0$  potenzialmente all'infinito si elide ! Il polo del circuito reazionato viene infatti a trovarsi alla **frequenza finita**  $f_p = A/2\pi C$ .

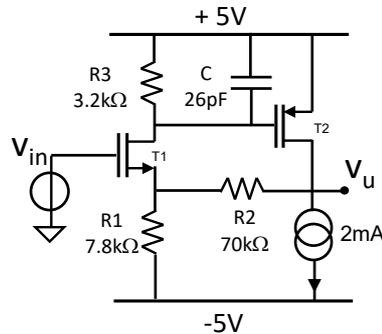


Ricordatevi che il prodotto  $\infty \cdot 0$  fornisce un numero finito. Il metodo più semplice per scoprirlo è proprio quello di inserire una  $r_0$  e poi fare il limite per  $r_0 \rightarrow \infty$

**E 12.1**

Considerare l'amplificatore seguente, i cui MOSFETs abbiano  $V_T=0.6V$ ,  $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=2mA/V^2$  e curve caratteristiche ideali ( $V_A=\infty$ ).

- Calcolare il valore stazionario della tensione di uscita,  $V_u$ , ed il guadagno ideale del circuito,  $G_{id}(s)=v_u(s)/v_{in}(s)$ .
- Confrontare la densità spettrale di rumore a bassa frequenza in uscita al circuito dovuta alla resistenza  $R1$  ( $S_u|_{R1}$ ) con quella dovuta a  $R2$  ( $S_u|_{R2}$ ), calcolando di quanto una è più grande dell'altra
- Calcolare la banda del circuito e tracciarne i diagrammi di Bode.
- Calcolare il valore RMS del rumore in uscita dovuto a  $R1$  ed a  $R2$  insieme.



- Se come primo tentativo immaginiamo corrente nulla in  $R2$ , troviamo conferma della polarizzazione finale a cui corrisponde  $V_u=-1.1V$  e  $g_{m1}=2mA/V$  e  $g_{m2}=4mA/V$ .  $G_{id}\cong 10$  indipendente dalla frequenza. Il circuito presenta anche  $G_{dir}=0.94$ , anch'esso indipendente dalla frequenza.
- La corrente di rumore di  $R1$  viene richiamata dalla retroazione a scorrere tutta in  $R2$ :

$$S_u|_{R1} = \frac{4kT}{R1} (R2)^2$$

La corrente di rumore di  $R2$  viene richiamata dalla retroazione a scorrere tutta dentro di essa:

$$S_u|_{R2} = \frac{4kT}{R2} (R2)^2$$

Pertanto il rumore di  $R1$  è più intenso di un **fattore 9** in termini di densità spettrale a bassa frequenza.

- Trascurando gli elementi reattivi dei transistori, il sistema è a singolo polo. Per trovarne il valore abbiamo bisogno dell'espressione di  $G_{loop}(s)$ :

$$G_{loop}(s) = -g_{m2} \frac{R1 \cdot R3}{1/g_{m1} + R1} \cdot \frac{1}{(1 + sR3C)}$$

Come evidenziato nella (12.2), i poli vengono ottenuti uguagliando l'espressione ad 1. Raccogliendo la  $R_3C$  fisica del circuito e  $G_{loop}(0)=-12$ , si ha :

$$-12 \cdot \frac{1}{R_3C} \frac{1}{\left(s - \left(-\frac{1}{R_3C}\right)\right)} = 1$$

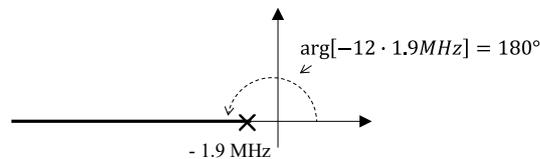
Se moltiplichiamo e dividiamo per  $2\pi$  possiamo ricondurci ad un piano complesso tarato in frequenza, forse più comodo da pensare :

$$-12 \cdot 1.9MHz \frac{1}{(s - (-1.9MHz))} = 1$$

L'equazione degli argomenti :

$$\arg[-12 \cdot 1.9MHz] - \arg[s - (-1.9MHz)] = 0^\circ$$

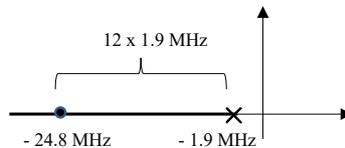
ci conferma che la posizione del polo  $s$  del circuito reazionato dovrà essere sull'asse reale a sinistra del valore  $-1.9MHz$  :



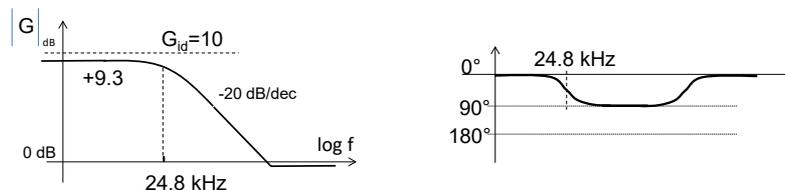
Per trovarne la posizione precisa usiamo l'equazione dei moduli :

$$|-12| \cdot |1.9MHz| = |(s - (-1.9MHz))|$$

Essa ci dice che il polo del circuito retroazionato dovrà stare ad una distanza dal punto a  $-1.9MHz$  pari a 12 volte (è il  $G_{loop}(0)$ ) il valore di  $1.9MHz$ :



a cui corrisponde una frequenza di circa **24.8MHz** rispetto all'origine che quindi definisce la banda passante del circuito. Il circuito è sempre stabile. Concludendo e facendo riferimento alla (12.1), esso sarà rappresentabile dai seguenti diagrammi di Bode:

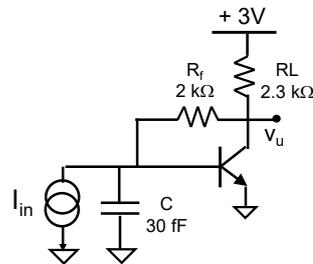


- d) Conoscendo la banda del circuito è immediatamente calcolabile il valore RMS del rumore in uscita dovuto alle due resistenze :

$$\text{RMS} = \sqrt{\left[ \frac{4kT}{R_1} (R_2)^2 + \frac{4kT}{R_2} (R_2)^2 \right]} \cdot 24.8\text{MHz} \frac{6.28}{4} = 0.7\text{mV}$$

**E 12.2**

Discutere il comportamento in frequenza del ricevitore a transimpedenza per comunicazioni in fibra ottica della figura seguente, in cui il fotodiiodo che trasforma il segnale ottico in segnale elettrico è rappresentato dal generatore equivalente di corrente di segnale e dalla capacità  $C_D=30\text{fF}$ . Si adotti l'ipotesi semplificativa di trascurare le capacità del transistor, avente  $f_T=400\text{GHz}$  e  $\beta=100$ . In particolare:



- calcolare il guadagno di anello in funzione della frequenza, indicando sul piano complesso la posizione della sua costante di tempo;
- tracciare il corrispondente luogo delle radici;
- individuare sul luogo il punto in cui si colloca il polo del circuito reazionato;
- tracciare il diagramma di Bode del trasferimento del circuito;
- stimare il massimo bit-rate sostenibile da tale circuito in una comunicazione digitale.

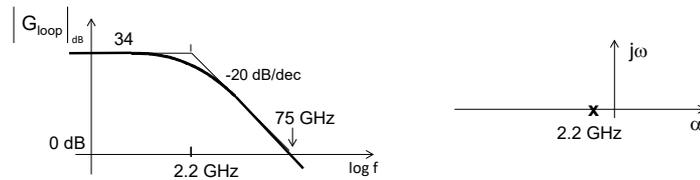
(a) - Valutata la polarizzazione ( $V_U \cong +0.7\text{V}$ ,  $I_C \cong 1\text{mA}$ ) ed il trasferimento ideale del circuito ( $T_{id} = -R_f = -2\text{k}\Omega$ ), il guadagno di anello è :

$$G_{\text{loop}}(s) = - \frac{R_L g_m}{R_L + R_f + \frac{\beta}{g_m} \parallel \frac{1}{sC}} \cdot \frac{\beta}{g_m} \parallel \frac{1}{sC}$$

che può essere riscritta nella forma

$$G_{\text{loop}}(s) = - \frac{\beta R_L}{\frac{\beta}{g_m} + R_L + R_f} \cdot \frac{1}{1 + sC \frac{\frac{\beta}{g_m} (R_L + R_f)}{\frac{\beta}{g_m} + R_L + R_f}} = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1}{1 + s\tau}$$

in cui  $G_{\text{loop}}(0) = -34$  e  $\tau = 73\text{ps}$  è la sua costante di tempo, corrispondente a 2.2 GHz. Il grafico di Bode di  $G_{\text{loop}}(s)$  ed il suo polo, indicato con il simbolo "x" nel piano di Gauss, sono i seguenti :

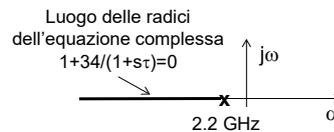


(b) - I poli della funzione di trasferimento del circuito retroazionato  $G(s)$  corrispondono ai valori di  $s$  che soddisfano alle due equazioni

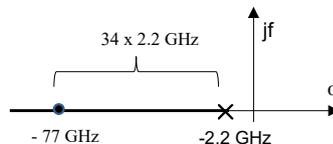
$$\left| -34 \cdot \frac{1}{1 + s\tau} \right| = 1$$

$$\arg \left[ -\frac{34}{\tau} \right] - \arg \left[ s - \left( -\frac{1}{\tau} \right) \right] = \pm k \cdot 360^\circ$$

La seconda fornisce il luogo delle radici, che si estende dal polo di  $G_{loop}(s)$  fino all'infinito lungo l'asse reale negativo. La risposta del circuito ad un segnale di ingresso a gradino sarà quindi sempre monotona, ovvero priva di oscillazioni, poiché il polo è sempre reale negativo.



(c) - L'effettiva posizione del polo  $p^*$  del circuito retroazionato, determinata imponendo la condizione sul modulo, può essere trovata procedendo per via analitica, ma anche in modo grafico. Infatti il numeratore della espressione individua la distanza tra il generico punto  $s$  del luogo e  $p = -2.2 \text{ GHz}$ . Il denominatore corrisponde invece alla distanza tra il punto  $p$  e l'origine degli assi. Il polo  $p^*$  del circuito reazionato si troverà perciò dove il rapporto tra le due distanze è pari a 34, cioè pari a  $|G_{loop}(0)|$ , come è riportato nella figura.



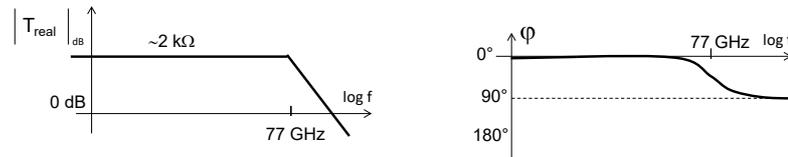
Si noti come la costruzione grafica sia fatta relativamente a  $|1/2\pi\tau| = 2.2 \text{ GHz}$ , che quindi assume la funzione di unità di misura. La distanza  $|1/\tau|$  può essere dunque scelta arbitrariamente, pari ad esempio ad un centimetro o ad un quadretto del foglio del quaderno. Il polo del circuito retroazionato è pari così a

$$p^* = -\frac{1 - G_{loop}(0)}{2\pi\tau} = -\frac{35}{2\pi\tau} = -77 \text{ GHz}$$

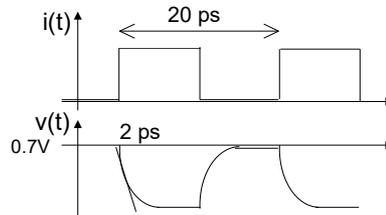
che ne definisce la banda passante.

L'elevata banda può essere compresa circuitalmente per via sintetica. Infatti, all'aumentare del guadagno d'anello, il nodo sulla Base del transistor diventa una terra virtuale sempre migliore. Quindi la tensione ai capi delle capacità tende a variare sempre meno, assorbendo sempre meno carica e quindi risultando il circuito sempre più veloce nell'operare.

(d) I diagrammi di Bode del trasferimento del circuito sono quindi :

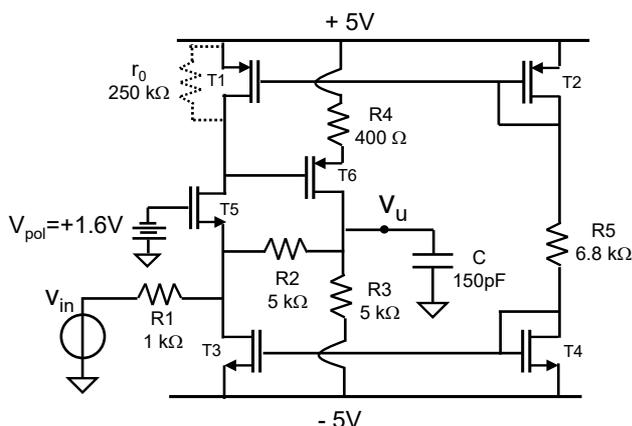


(e) - Se in ingresso fosse applicato un segnale a gradino di corrente, la tensione di uscita risponderebbe con una costante di tempo pari a  $\tau=2\text{ps}$ . La massima frequenza di impulsi di corrente in ingresso che dia una corrispondente sequenza di impulsi di tensione riconoscibili in uscita è quindi quella con un periodo di circa 20ps (50Gbit/s), in modo da permettere al gradino in uscita di giungere molto vicino al valore asintotico sia sul fronte positivo che su quello negativo.



**E 12.3**

Analizzare il comportamento dell'amplificatore seguente i cui MOSFETs abbiano  $V_T=0.6V$ ,  $k=1mA/V^2$  e  $V_a=\infty$  eccetto T1 che mostra una  $r_0=250k\Omega$ .



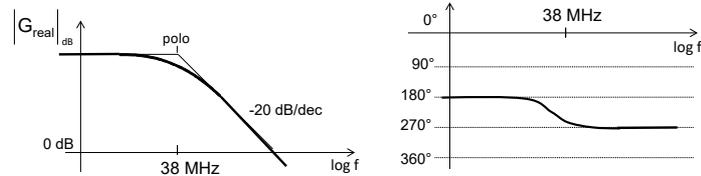
- Calcolare il valore DC della corrente circolante in T5 nell'ipotesi che  $r_0$  di T1 sia infinita. Convincersi che in effetti  $r_0$  di T1 non influisce sulla polarizzazione del circuito. Stimare il valore della tensione  $V_u$  di polarizzazione dell'uscita;
- Calcolare il guadagno ideale,  $G_{id}(s)=v_u/v_{in}$  del circuito.
- Calcolare il guadagno di anello  $G_{loop}(s)$  del circuito.
- Disegnare l'andamento in frequenza del modulo e della fase della funzione di trasferimento del circuito,  $G_{real}(s)$ .
- Calcolare l'impedenza di uscita del circuito. Verificare che la costante di tempo che si ottiene con questa impedenza di uscita coincida con il valore trovato con il luogo delle radici al punto d). Commentare il risultato;
- Disegnare l'andamento nel tempo della tensione  $V_u$  quando in ingresso viene applicata un gradino positivo di tensione ampio  $V_{in}=10mV$ .
- Calcolare il polo che avrebbe il circuito se  $r_0=\infty$  e fosse presente  $C_{gdT5}=33pF$  e non ci fosse la capacità all'uscita di  $C=150pF$ .

(a) La polarizzazione, dettata da R5 e dallo specchio T1, T2, T3 e T4 impone in T5 una corrente di 1mA (la corrente da T1 non può che scorrere in T5). La tensione di Source di T5 si pone quindi circa a 0V. In R1 la corrente è trascurabile e pertanto  $V_u \approx 0V$  e  $I_{T6}=1mA$ . Se avessi considerato  $r_0$  di T1,  $V_u$  starebbe a circa -40mV. Tutti i MOSFET mostrano  $1/g_m=500\Omega$ .

(b)  $G_{id}=-5$ . Notare che il guadagno ideale non dipende né da R3 né da C !

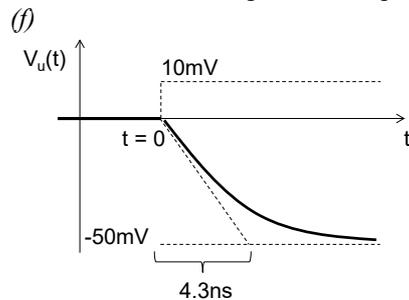
(c)  $G_{loop}(s) = -89 \cdot \frac{1}{1+s\tau}$  con  $\tau = C \cdot [R_3 \parallel (R_2 + R_1 \parallel 1/g_{m5})] = 370ns$ .

(d) Utilizzando il metodo del luogo delle radici si ottiene un **polo del circuito alla frequenza di 38MHz** (costante di tempo di 4.2ns). La funzione di trasferimento del circuito pertanto assume i seguenti andamenti :



Il circuito presenta anche un  $G_{dir}(0)=0.16$  con un polo a 410kHz, che dà un contributo trascurabile ai grafici appena tracciati.

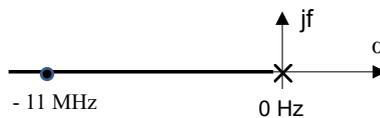
(e) Allo stesso valore di 38MHz si può giungere notando che nei casi come questo in cui sia presente una sola capacità nel circuito, collegata ad un nodo dell'anello con l'altro capo a massa, la costante di tempo della risposta è data dal prodotto della capacità con la resistenza da essa vista. Questa nel nostro caso coincide con la resistenza di uscita del circuito che è pari a  $29\Omega$ . Pertanto  $\tau=29\Omega \times 150pF=4.3ns$ , equivalenti a  $f_p=38MHz$  trovata prima.



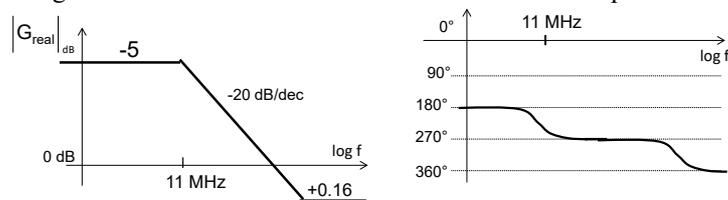
g) L'espressione di  $G_{loop}(s)$  conviene esprimerla in termini di  $r_0$  e poi farne il limite nel tracciare il luogo delle radici :

$$G_{loop}(s) = -r_0 \cdot 0.36 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1 + sCr_0} = 1$$

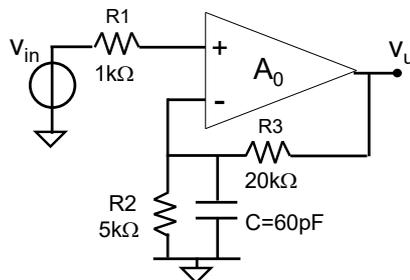
ottenendo un polo del circuito retroazionato circa alla frequenza  **$f_p=11MHz$** .



I diagrammi di bode del trasferimento del circuito sono quindi :



**E 12.4** Analizzare il comportamento dell'amplificatore seguente il cui OpAmp abbia un guadagno differenziale  $A_0=3000$ , resistenze di ingresso infinite e resistenza di uscita nulla.

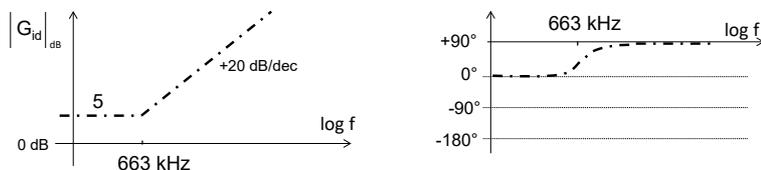


- Calcolare il guadagno ideale,  $G_{id}(s)$ , del circuito  $V_u/V_{in}$  e disegnarne i diagrammi di Bode quotati.
- Calcolare il polo del circuito.
- Disegnare l'andamento in frequenza del modulo e della fase della funzione di trasferimento del circuito,  $G_{real}(s)$ ;

Il circuito ha una sola capacità, posizionata nella rete di retroazione. Questa quindi si manifesterà già nel guadagno ideale. La funzione di **trasferimento ideale** tra ingresso ed uscita è data da:

$$\frac{v_{in}}{\frac{R_2}{1+sCR_2}} \cdot \left( R_3 + \frac{R_2}{1+sCR_2} \right) = v_u \rightarrow G_{id}(s) = \frac{R_3+R_2}{R_2} \cdot (1 + sCR_2 \parallel R_3)$$

Notate come il guadagno ideale non presenti alcun polo ma solo uno zero !

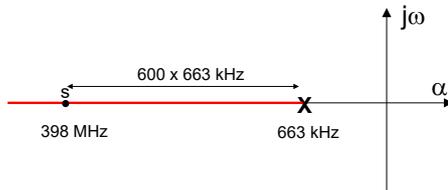


I diagrammi di Bode evidenziano questo aspetto in cui all'aumentare della frequenza del segnale di ingresso la corrente prodotta in C aumenta e quindi aumenta la caduta di tensione ai capi di R3 e quindi la tensione dell'uscita.

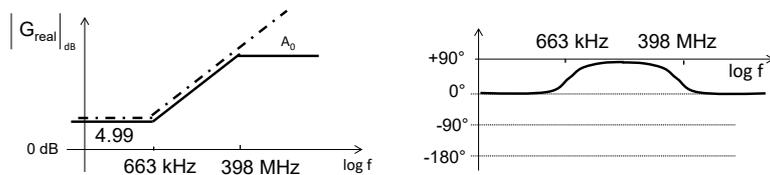
b) Per capire dove stia il polo del circuito, che inevitabilmente ci deve essere (!), calcoliamo il **guadagno d'anello del circuito**:

$$G_{loop}(s) = -A_0 \frac{R_2}{R_2+R_3} \cdot \frac{1}{1+sCR_2 \parallel R_3}$$

dove  $G_{loop}(0)=-600$  ed il polo è a 663kHz. Il luogo delle radici di un  $G_{loop}(s)$  con solo un polo è analogo a quello della Fig.12.3 e la sua taratura ci porta a ricavare il polo del circuito alla frequenza 663kHz(1- $G_{loop}(0)$ )=**398MHz**.



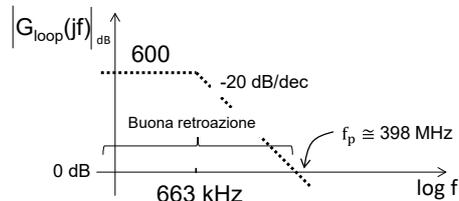
c) Sulla base di questo risultato possiamo disegnare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del guadagno del circuito, a tratto continuo :



Il circuito ha ipoteticamente una banda infinita, limitata nella realtà dagli addizionali poli non considerati in questo calcolo ma inevitabilmente presenti all'interno dell'amplificatore operazionale o altrove.

Essendoci chiaro il comportamento del circuito, possiamo fare una considerazione finale che ulteriormente avvalorata quanto ottenuto. Essa si basa sull'analisi del comportamento in frequenza del guadagno di anello, riportato in modulo nella figura accanto.

Esso ci dice che per un ampio intervallo di frequenze, dalla continua fino alla frequenza di circa 398MHz indicata nella figura



ed ottenuta con il prodotto Guadagno x Banda, il valore del guadagno di anello si mantiene elevato, sicuramente maggiore di 1, assicurando a tutte queste frequenze una forte reazione e quindi un comportamento "quasi ideale". *Fino a tale frequenza ci aspettiamo quindi che il **guadagno reale** segua bene quello ideale calcolato all'inizio.*

Dalla frequenza di 398MHz in avanti invece il circuito risulta non più retroazionato e quindi si discosterà dalla curva di  $G_{id}$ . In particolare alle frequenze superiori a 398MHz (quando cioè il guadagno di anello è inferiore a 1) l'ingresso invertente dell'operazionale (v-) non verrà aggiornato dalla retroazione e quindi rimarrà fisso in tensione ed il trasferimento tra ingresso ed uscita tenderà a diventare costante e pari a  $A_0$ , a conferma ed ulteriore chiarimento di quanto ottenuto prima.

### 12.2.2 Luogo delle radici : caso di 1 polo e di 1 zero in $G_{loop}(s)$

La presenza di una sola capacità nel circuito può riflettersi nell'espressione del guadagno d'anello  $G_{loop}(s)$  anche con la presenza di uno zero oltre all'inevitabile polo. Questo è il caso ad esempio del circuito della Fig.12.4.

Chiediamoci quindi quale sia il polo di questo circuito retroazionato calcolando, come visto fino ad ora, il **guadagno di anello** in funzione della frequenza :

$$G_{loop}(s) = -\frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot A_0 \cdot \frac{1+sCR_2}{1+sCR_1\parallel R_2} = -G_{loop}(0) \cdot \frac{1+s\tau_z}{1+s\tau_p}$$

Esso effettivamente presenta sia un polo che uno zero, entrambi negativi e quindi posizionati nel semipiano sinistro del piano complesso. Si noti che in questo esempio il polo è ad una frequenza più elevata dello zero.

La condizione (12.2) si esplicita come:

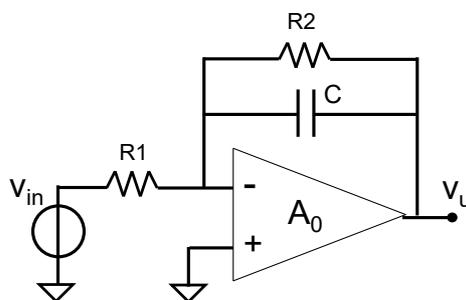
$$G_{loop}(0) \cdot \frac{\tau_z}{\tau_p} \cdot \frac{s-(-1/\tau_z)}{s-(-1/\tau_p)} = 1 \quad (12.8)$$

in cui si è evidenziato sia il polo  $p=-1/\tau_p$  che lo zero  $z=-1/\tau_z$  del guadagno d'anello.

In questo caso, **l'equazione degli argomenti** (12.3a) diventa:

$$\arg \left[ G_{loop}(0) \frac{\tau_z}{\tau_p} \right] + \arg \left[ s - \left( -\frac{1}{\tau_z} \right) \right] - \arg \left[ s - \left( -\frac{1}{\tau_p} \right) \right] = 0^\circ \quad (12.9)$$

Rappresentando come vettori su un piano complesso ( $\alpha, j\omega$ ) gli elementi complessi dell'equazione, come si vede nella Fig.12.5, il primo termine vale  $180^\circ$  perché è l'argomento di un numero reale negativo ( $G_{loop}(0)<0$  quando la reazione è negativa), il secondo termine corrisponde all'angolo formato con l'asse orizzontale dal segmento congiungente un punto  $s$  del piano a  $z=-1/\tau_z$  ed il terzo termine



**Fig. 12.4** Esempio di circuito retroazionato in cui compare un condensatore solo nel ramo di retroazione ed il cui guadagno di anello manifesta sia uno zero che un polo.

corrisponde all'angolo formato con l'asse orizzontale dal segmento congiungente lo stesso punto  $s$  del piano a  $p=-1/\tau_p$ .

E' facile rendersi conto che il **luogo dei poli** del circuito reazionato (il **luogo delle radici** dell'equazione (12.8)), cioè dei punti  $s$  che soddisfano la (12.9), è costituito da tutti i punti dell'asse reale posti tra il polo e lo zero di  $G_{loop}(s)$ , rappresentato appunto dalla linea marcata nella Fig.12.5. Per convincerene provate a prendere un punto  $s$  diverso da questi e non riuscirete a soddisfare l'equazione degli angoli !

L'effettiva posizione del polo del circuito retroazionato è quella che soddisfa anche la **condizione sul modulo** (12.3b)

$$|G_{loop}(0)| \cdot \left| \frac{\tau_z}{\tau_p} \right| \frac{|s-(-1/\tau_z)|}{|s-(-1/\tau_p)|} = 1 \quad (12.10)$$

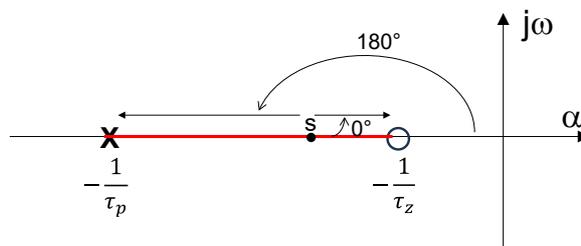
dove

- il numeratore  $|s-(-1/\tau_z)|$  individua la distanza tra il generico punto  $s$  del luogo ed il punto  $(-1/\tau_z)$ .
- il denominatore  $|s-(-1/\tau_p)|$  individua la distanza tra quello stesso generico punto  $s$  del luogo ed il punto  $(-1/\tau_p)$ .

Il valore di "s" che soddisfa la condizione sui moduli, cioè il polo del circuito reazionato che stiamo cercando, sarà quindi nella posizione per la quale il rapporto delle due distanze sia pari al termine noto di destra :

$$\frac{|s-(-1/\tau_p)|}{|s-(-1/\tau_z)|} = |G_{loop}(0)| \cdot \left| \frac{\tau_z}{\tau_p} \right| \quad (12.11)$$

Come si vede nella Fig.12.5 il polo del circuito sarà sempre confinato tra il polo e lo zero del guadagno di anello : per  $G_{loop}(0)=0$  la banda coincide con quella iniziale del circuito madre senza la retroazione; se il circuito fosse idealmente retroazionato ( $G_{loop}(0)=\infty$ ), il circuito avrebbe la banda definita esattamente dallo zero



**Fig. 12.5** La linea marcata congiungente il polo di  $G_{loop}(s)$  e lo zero di  $G_{loop}(s)$  rappresenta sul piano complesso le possibili soluzioni (radici) dell'equazione (12.8) e quindi i poli del circuito retroazionato.

presente nel guadagno di anello.

Se ne deduce che in un circuito retroazionato che *abbia un polo ed uno zero nell'espressione del suo guadagno di anello*, la retroazione posiziona la banda passante del circuito entro i valori dello zero e del polo di  $G_{loop}(s)$ .

Il luogo della Fig.12.5 ci mostra chiaramente che il polo del circuito reazionato sarà comunque sempre reale e negativo, evidenziando un circuito sempre stabile che risponde ad una sollecitazione all'ingresso con una risposta esponenziale di cui si conosce perfettamente la costante di tempo.

#### DIAGRAMMA di BODE di un CIRCUITO RETROAZIONATO

Oltre al polo (o in generale ai poli), un circuito retroazionato può avere anche degli zeri. La conoscenza di entrambi è essenziale per tracciare correttamente i diagrammi di Bode del trasferimento  $G(s)$  :

$$G(s) = G_{id}(s) \frac{-G_{loop}(s)}{1 - G_{loop}(s)} + G_{dir}(s) \frac{1}{1 - G_{loop}(s)}$$

Per determinare gli zeri del circuito retroazionato  $G(s)$  si noti che :

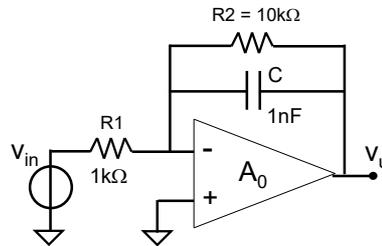
- essi coincideranno con gli zeri di  $G_{id}(s)$  se presenti (eccetto il caso particolare in cui questi si elidano con i poli del circuito retroazionato);
- essi coincideranno con gli zeri di  $G_{loop}(s)$  se presenti (eccetto il caso particolare in cui questi si elidano con i poli di  $G_{id}$ );
- essi saranno deducibili dalla presenza del guadagno diretto,  $G_{dir}(s)$ , che ad alta frequenza può porre un limite sotto cui il guadagno non potrà scendere, bloccando quindi la discesa dovuta ai poli.

Alcuni degli esercizi di questo capitolo chiariranno questi casi.

**E 12.5**

L'amplificatore seguente utilizza un amplificatore operazionale con uscita in tensione avente guadagno differenziale  $A_0=10^3$ , impedenza di ingresso infinita ed impedenza di uscita zero.

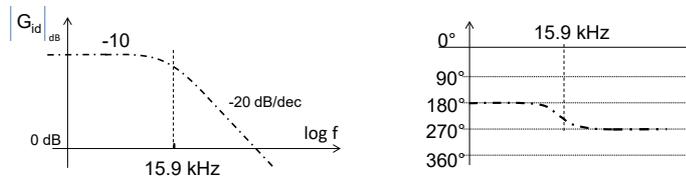
- a) Calcolare il **guadagno ideale**  $v_u/v_{in}$  del circuito e rappresentarlo graficamente con i diagrammi di Bode.  
 b) Calcolare il guadagno di anello del circuito in funzione della frequenza e calcolare la **reale banda passante del circuito**.



- a) Il circuito presenta una sola capacità, posizionata nel ramo di retroazione e quindi tale da manifestarsi già nel guadagno ideale del circuito. La **funzione di trasferimento ideale** tra ingresso ed uscita è infatti data da :

$$\frac{v_{in}}{R_1} = -\frac{v_u}{R_2 \parallel (1/sC)} \quad \Rightarrow \quad G_{id}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+sCR_2}$$

La corrispondente rappresentazione spettrale del modulo e della fase è quindi:

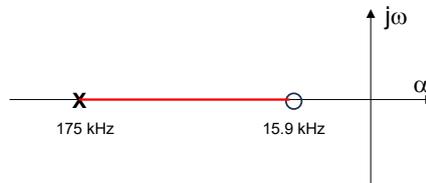


in cui è visualizzata la posizione del polo del circuito retroazionato idealmente (il solo presente perché il circuito ha un solo elemento conservativo) alla frequenza di **15.9kHz** che definisce la **banda passante del circuito nel caso ideale**.

- b) Per capire quanto tale risultato sia estendibile al caso reale, analizziamo il guadagno di anello del circuito. Esso vale:

$$G_{loop}(s) = -\frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot A_0 \cdot \frac{1+sCR_2}{1+sCR_1 \parallel R_2}$$

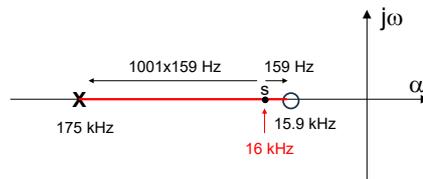
in cui  $G_{loop}(0)=-91$ ,  $f_z=15.9\text{kHz}$  e  $f_p=175\text{kHz}$ . Il luogo delle radici risultante è il seguente :



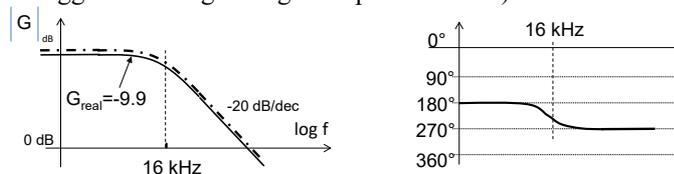
Il valore del polo del circuito viene trovato tarando il luogo, secondo la relazione (12.9) :

$$\frac{|s - (-1/\tau_p)|}{|s - (-1/\tau_z)|} = 1001$$

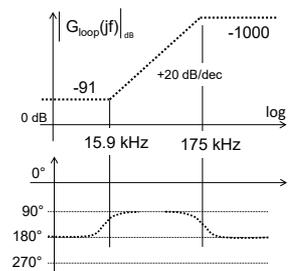
Il polo del circuito retroazionato si posiziona quindi alla frequenza **f\*=16kHz**, molto vicino allo zero di  $G_{loop}(s)$  come ci potevamo immaginare dato l'elevato valore di  $G_{loop}(0)$ . Il luogo tarato è quindi il seguente:



I diagrammi di Bode del circuito saranno quindi molto simili a quelli ideali (lasciati tratteggiati nella figura seguente per confronto):



Avendo finito e compreso il funzionamento del circuito, possiamo fare un'altra considerazione chiarificatrice. Se infatti rappresentiamo in un grafico l'andamento in frequenza di  $G_{loop}(s)$  capiamo che, essendo  $A_0$  grande,  $G_{loop}(f)$  pur variando di valore con la frequenza rimane sempre molto elevato, assicurando quindi una forte retroazione nel circuito a tutte le frequenze. Questo ci consente di aspettarci che il guadagno reale del circuito si dovrà mantenere molto simile al guadagno ideale in tutto l'intervallo di frequenze, e quindi che il circuito reale avrà effettivamente un polo ad una frequenza molto prossima a quella ideale.

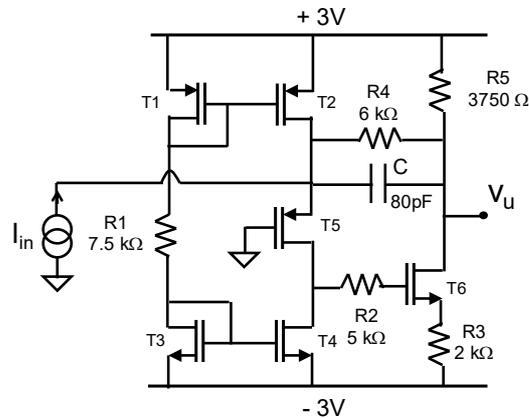


Inoltre, l'andamento della fase di  $G_{loop}(s)$  mostra che essa rimane confinata tra -180° e -90° e quindi ci assicura che mai il segnale riportato all'ingresso dal ramo di reazione possa comporsi in perfetta fase con il segnale  $v_{in}$  da dare una retroazione positiva, assicurandoci che il circuito sarà sempre stabile.

**E 12.6**

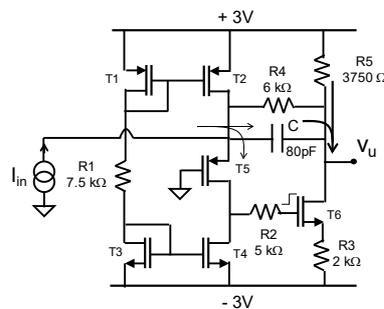
L'amplificatore a transresistenza disegnato sotto ha tutti i MOSFET con  $V_T=0.5V$ ,  $k=400\mu A/V^2$  e  $V_a=\infty$ .

- Calcolare il valore della tensione  $V_u$  di polarizzazione dell'uscita
- Calcolare il **trasferimento ideale**  $v_u/i_{in}$  in frequenza del circuito e rappresentarlo graficamente in un diagramma di Bode.
- Calcolare la **reale banda passante del circuito**.



a) I transistori T1, T2, T3 e T4 formano un generatore di corrente a specchio di  $400\mu A$ . La medesima corrente scorrerà necessariamente in T5. In R4 quindi non potrà scorrere corrente, cosicché ai capi di R5 risulteranno esserci  $1.5V$ . La corrente in T6 sarà quindi di  $400\mu A$  e la tensione al suo gate è a  $-0.7V$ .  $V_u=1.5V$ . Tutti i transistori risultano funzionare nella loro zona di funzionamento corretta. Tutti i transistori mostrano una  $g_m=800\mu A/V$ .

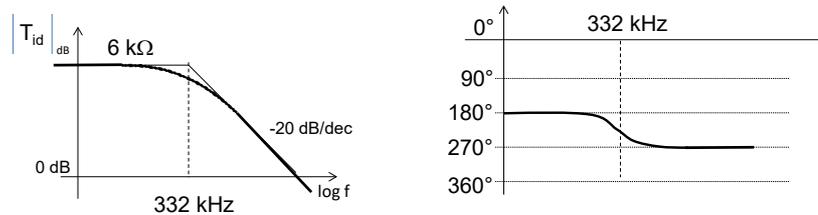
b) La corrente di segnale  $i_{in}$  fa inizialmente salire la tensione del Source di T5; una parte di  $i_{in}$  scorrerà così in T5 facendo alzare la tensione al Gate di T6. Questo provoca un aumento della corrente in T6 che proviene da R5 e da R4||C. Nell'ipotesi di  $G_{loop}$  elevato, il circuito tende a richiamare da R4||C tutta la corrente disponibile con  $i_{in}$ . In T5 continuerà a scorrerne solo quella frazione piccolissima ( $\epsilon$ ) necessaria a



sostenere il meccanismo, e quindi il Source di T5 a regime si sposterà in tensione di pochissimo, ininfluente ai fini dei calcoli (terra virtuale). Ne consegue che  $V_u$  sarà immediatamente calcolabile come la tensione ai capi di R4||C e cioè pari a :

$$v_u(s) = -i_{in}(s) \frac{R_4}{1 + sR_4C}$$

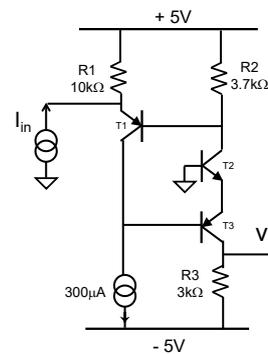
Tale funzione di **trasferimento ideale** è rappresentata nei seguenti diagrammi di Bode:



c) Per trovare il polo reale del circuito calcolo il suo **guadagno di anello**. Esso risulta essere **infinito** a tutte le frequenze grazie al Gate di T6 in serie alla corrente di segnale proveniente da T5. Possiamo quindi concludere che questo circuito e' praticamente ideale nel suo comportamento e che quindi la sua **banda passante** sarà proprio pari al valore di **332kHz** trovato nella condizione ideale. Notate che avere  $G_{loop}=\infty$  rende anche assolutamente trascurabile il contributo di trasferimento diretto, che sarebbe presente.

**E12.7** Considerare il circuito della figura accanto (già visto in E11.25) in cui i BJT abbiano  $\beta=300$  e  $V_a=\infty$ . Dopo averlo polarizzato ed averne indagato il funzionamento ideale:

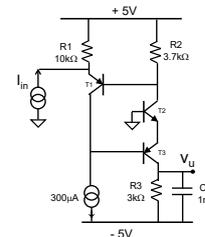
- disegnare i diagrammi di Bode del trasferimento del circuito quando è presente una  $C=1nF$  in parallelo a  $R_3$ .
- disegnare i diagrammi di Bode del trasferimento del circuito quando è presente una  $C=1nF$  in parallelo a  $R_2$ .

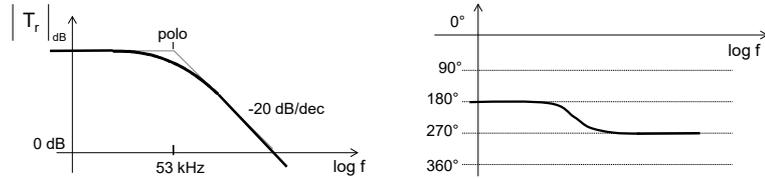


a) Il trasferimento ideale del circuito è:

$$T(s) = \frac{v_u(s)}{i_{in}(s)} = -R_1 \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{1}{1 + sCR_3}$$

Esso presenta un polo alla frequenza  $f_p=53kHz$ . Tuttavia si noti che la capacità  $C$  NON fa parte dell'anello. Per convincersene basta fare il calcolo di  $G_{loop}(s)$  e verificare che la capacità  $C$  non compare nell'espressione dell'anello:  $G_{loop}(s)=-110$ . La resistenza vista dalla capacità  $C$  quindi non viene modificata dall'anello di cui non ne fa parte, e quindi il polo del trasferimento è fisso ed indipendente da  $G_{loop}$  :





b) Pur essendoci ancora solo una capacità, la situazione ora è completamente diversa. Il trasferimento ideale del circuito infatti evidenzia la capacità:

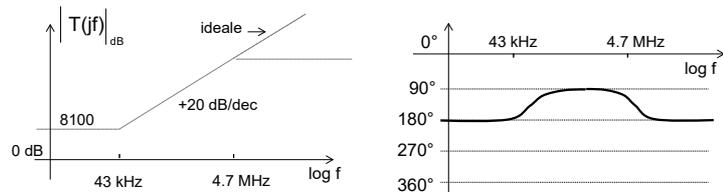
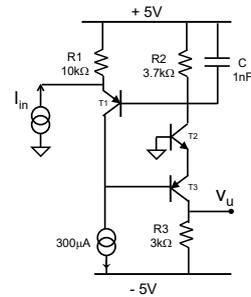
$$T(s) = \frac{v_u(s)}{i_{in}(s)} = -R_1 \frac{R_3}{R_2} \cdot (1 + sCR_2)$$

Esso presenta uno zero alla frequenza  $f_p=43\text{kHz}$  e nessun polo. Poiché il circuito ha una capacità, ci aspettiamo il polo nella funzione di trasferimento reale e questo viene calcolato ricavando  $G_{loop}(s)$ :

$$G_{loop}(s) = -110 \cdot \frac{1}{1 + sC(R_2 \parallel (\beta/g_m + \beta R_1))}$$

Poiché  $\tau = C(R_2 \parallel (\beta/g_m + \beta R_1)) = 3.7 \mu\text{s}$ , il polo di  $G_{loop}$

si trova a  $f \approx 44\text{kHz}$  ed il guadagno d'anello taglia l'asse a 0dB circa alla frequenza  $f_p=4.7\text{MHz}$ . Il diagramma di Bode del trasferimento risulta quindi:

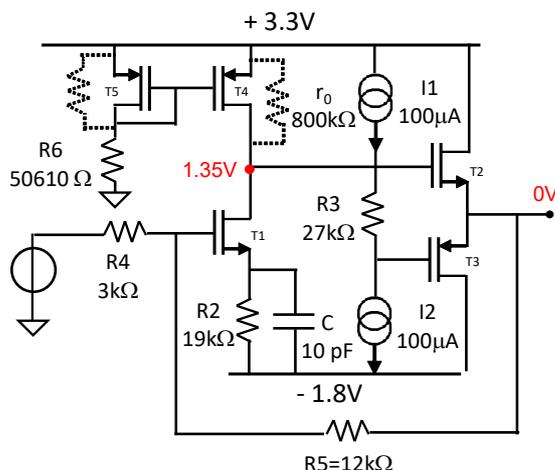


La banda passante, cioè l'intervallo di frequenze in cui è opportuno usare questo circuito, dipende dall'applicazione: i) da DC a 43kHz il circuito è ben reazionato e con transresistenza costante pari a 8100 Ω; ii) da 43kHz a 4.7MHz il circuito è ben reazionato e si comporta da derivatore ideale; iii) sopra i 4.7MHz il circuito non è più retroazionato, ha transresistenza elevata (~900kΩ) ed è improbabile che lo si usi: che senso avrebbe fare un circuito retroazionato ed usarlo quando non lo è più !

**E12.8**

Considerare l'amplificatore seguente, utilizzando MOSFET con  $V_T=0.35V$  e  $k=1/2\mu C_{ox}W/L=200\mu A/V^2$ . I transistori sono ideali eccetto quelli dello specchio (T4 e T5) che hanno  $V_a=38V$  e che quindi mostrano una resistenza di carico di  $800k\Omega$ .

- Verificare che la polarizzazione ponga  $V_u=0V$ .
- Calcolare il guadagno ideale del circuito  $G_{id}(s)=v_u(s)/v_{in}(s)$ .
- Calcolare la densità spettrale di rumore all'uscita a bassa frequenza generata dal rumore di canale di T1.
- Calcolare l'espressione del guadagno di anello del circuito  $G_{loop}(s)$  e disegnarne i Diagrammi di Bode quotati del modulo e della fase.
- Calcolare il polo del circuito e tracciare i diagrammi di Bode quotati del guadagno reale  $G_{real}(s)=v_u(s)/v_{in}(s)$  del circuito.



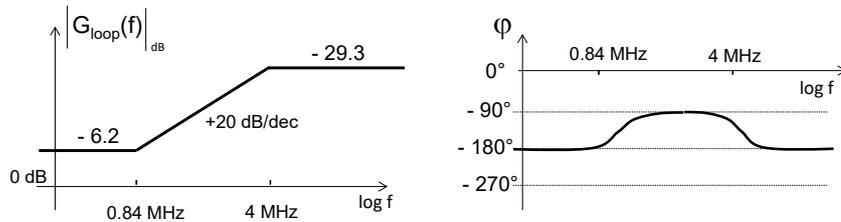
- $g_{m1}=200\mu A/V^2$ ;  $g_{m2}=g_{m3}=400\mu A/V^2$ . I transistori T2 e T3 svolgono la funzione di buffer di tensione con impedenza di uscita (al loro comune Source) di  $1/g_{m2} || 1/g_{m3}=1250\Omega$ .
- $G_{id}(s)=-4$  indipendente dalla frequenza.
- La retroazione forza tutto il rumore ad essere ripreso da T1 stesso. Non scorrendone in R2, il Source di T1 rimane fisso. Per fare passare la corrente di rumore al suo interno, la retroazione sposta il Gate di T1. Questo spostamento si manifesta amplificato all'uscita del circuito come :

$$S_u = \frac{2}{3} \cdot \frac{4kT}{1/g_{m1}} \left(\frac{1}{g_{m1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_4+R_5}{R_4}\right)^2 = 1.3 \cdot 10^{-15} \left[\frac{V^2}{Hz}\right] = \left(36.5 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 .$$

- Il guadagno dell'anello ha la seguente espressione :

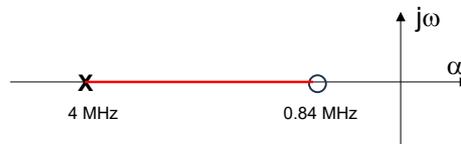
$$G_{loop}(s) = -\frac{r_0}{1/g_{m1} + R_2} \cdot \frac{R_4}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g_{m2}} + R_4 + R_5} \cdot \frac{1 + sR_2C}{1 + sR_2 \left\| \frac{1}{g_{m1}} \right. C}$$

con  $G_{loop}(0)=-6.2$  e  $f_z=0.84\text{MHz}$  e  $f_p=4\text{MHz}$ . I grafici di Bode sono i seguenti :



L'andamento di  $G_{loop}$ , sempre elevato a tutte le frequenze, ci fa presagire che il circuito sia sempre ben retroazionato e quindi il suo comportamento reale si discosti poco da quello ideale prima trovato, a tutte le frequenze.

e) Poiché c'è una capacità lungo l'anello, il circuito avrà sicuramente un polo. Questo può essere calcolato analizzando il luogo delle radici :



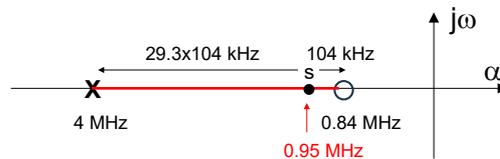
Riformulando l'espressione  $G_{loop}(s)=1$  in una espressione compatta :

$$G_{loop}(0) \cdot \frac{f_p}{f_z} \cdot \frac{[s - (-f_z)]}{[s - (-f_p)]} = 1$$

si ottiene :

$$-29.3 \cdot [s - (-f_z)] = [s - (-f_p)]$$

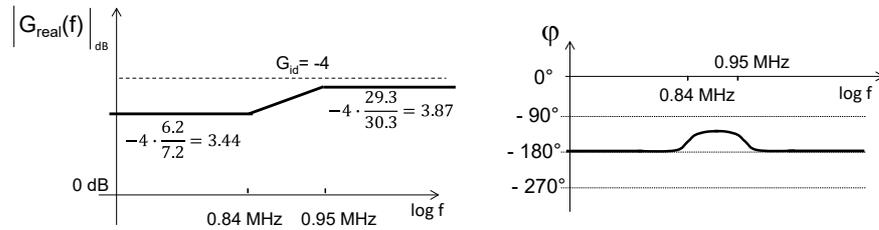
Dal grafico si vede che  $30.3 \cdot [s - (-f_z)] = 3.16\text{MHz}$  e quindi si ricava il valore del **polo del circuito retroazionato a  $f_p=0.95\text{MHz}$** .



Poiché il circuito, sempre ben retroazionato, ci aspettiamo abbia un comportamento in frequenza che si dovrà scostare poco da quello ideale, ci aspettiamo che ci sia anche uno zero nel guadagno reale. In effetti dalla relazione :

$$G_{real}(s) = G_{id}(s) \cdot \frac{-G_{loop}(s)}{1 - G_{loop}(s)} + G_{dir}(s) \cdot \frac{1}{1 - G_{loop}(s)}$$

potendo trascurare, come nel nostro caso succede, il termine del guadagno diretto ( $G_{dir}=0.08$ ), si vede che se  $G_{loop}(s)$  ha uno zero, esso si mantiene inalterato nel  $G_{real}(s)$ . Pertanto concludiamo tracciando il seguente guadagno del circuito, in cui si evidenzia come esso si discosti poco dal guadagno trovato nell'ipotesi di retroazione ideale :



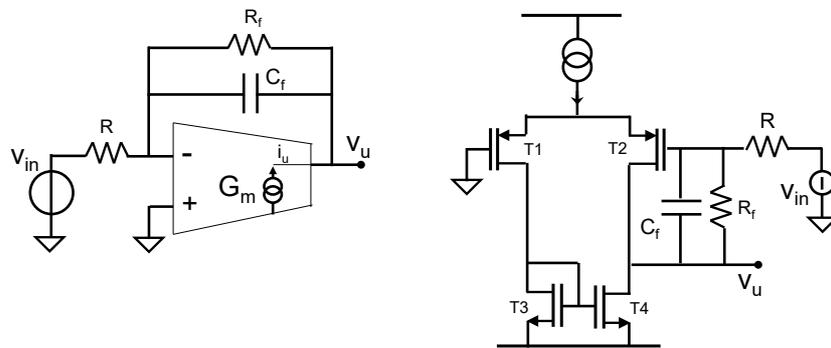
### 12.2.3 Circuiti retroazionati utilizzando un OTA (Operational Transconductance Amplifier)

Può succedere che pur essendoci una capacità nel ramo di retroazione del circuito, questa non si manifesti nel guadagno di anello. Questo è il caso di quei circuiti in cui il ramo di andata, senza capacità, abbia l'uscita in corrente e la capacità si trovi nel ramo di retroazione proprio in serie all'uscita lungo l'anello. Nella Fig.12.6 è riportato un esempio di tale architettura impiegante un OTA (Operational Transconductance Amplifier) ed una sua realizzazione operativa a singoli transistori con una uscita diretta di corrente dai Drain dei MOSFETs.

Quando si calcola il guadagno di anello di tali circuiti si trova infatti che esso è costante, indipendente dalla frequenza: la capacità presente nel ramo di retroazione non entra in gioco perché la corrente in uscita dallo stadio di andata attraverserà comunque la rete di retroazione nel suo giro lungo l'anello senza esserne modificata dai valori dei componenti R e C. Ciò non toglie che quando si calcola il  $G_{id}(s)$  la capacità vi compaia e definisca precisamente l'andamento in frequenza del circuito. In questi casi quindi  $G_{loop}(s)=cost$  non dà alcuna indicazione sul comportamento in frequenza del circuito. L'andamento con la frequenza del guadagno è invece precisamente calcolato dall'espressione del guadagno ideale,  $G_{id}(s)$  (ed in misura normalmente molto minore dal guadagno diretto) secondo la ormai nota espressione:

$$G(s) = G_{id}(s) \frac{-G_{loop}(s)}{1-G_{loop}(s)} + G_{dir}(s) \frac{1}{1-G_{loop}(s)} \quad (12.1)$$

L'interesse per l'uso di un OTA (amplificatore a transconduttanza) rispetto ad un OpAmp (amplificatore operazionale con uscita di tensione), cioè l'interesse ad



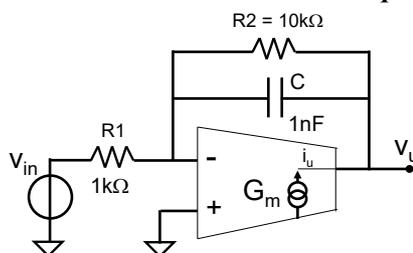
**Fig. 12.6** Circuiti retroazionati utilizzando un OTA (Operational Transconductance Amplifier) e sua realizzazione pratica a singoli transistori. In questi casi il  $G_{loop}(s)$  è costante non dipendendo dalla presenza della capacità  $C_f$ .

alimentare il ramo di retroazione in corrente invece che in tensione, sta proprio nel fatto che il guadagno di anello con l'OTA è "scorrelato" dal polo del circuito, perché il  $G_{loop}$  non contiene la capacità che definisce la banda. Pertanto la banda del circuito non dipende dal valore  $G_{loop}$  (che può essere scelto liberamente) ed il valore di guadagno del circuito è scorrelato dalla sua banda (in questi circuiti non si ha che il prodotto guadagno-banda, GBWP, sia costante come nei circuiti con OpAmp).

Il circuito inoltre è sicuramente più stabile perché non si hanno contributi allo sfasamento lungo l'anello dovuti alla capacità di feedback che definisce il polo ideale. La stabilità dipenderà solo dalle eventuali altre capacità parassite presenti nel circuito ma non dalla capacità che definisce la banda.

**E 12.9** Il circuito seguente utilizza un amplificatore a transconduttanza (OTA) avente impedenza di ingresso infinita, impedenza di uscita infinita e transconduttanza  $G_m=(v^+-v^-)/i_u=30\text{mA/V}$ . Se ne confronti il funzionamento con il circuito apparentemente simile dell'E 12.5.

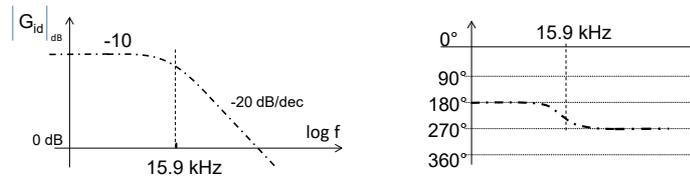
- Calcolare il **guadagno ideale**  $v_u/v_{in}$  del circuito e rappresentarlo graficamente con i diagrammi di Bode.
- Calcolare il **guadagno di anello** del circuito.
- Disegnare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del guadagno reale  $G_{real}(s)=v_u/v_{in}$  e calcolare la **reale banda passante del circuito**



- Il circuito presenta una sola capacità, posizionata nel ramo di retroazione e quindi tale da manifestarsi già nel guadagno ideale del circuito. Un segnale positivo all'ingresso sposta in alto il morsetto di ingresso invertente dell'amplificatore, a seguito del quale viene richiamata corrente  $i_u$  che proviene da  $R2||C$  e da  $R1$  facendo abbassare la tensione al morsetto invertente. Quando questo meccanismo si attua in modo perfetto, lo spostamento iniziale del morsetto invertente viene perfettamente contrastato, lasciandolo fermo. La **funzione di trasferimento ideale** tra ingresso ed uscita è quindi data da :

$$\frac{v_{in}}{R_1} = -\frac{v_u}{R_2 || (1/sC)} \quad \Rightarrow \quad G_{id}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+sCR_2}$$

L'espressione è quindi identica a quella trovata in E 12.5 in cui lo stadio di andata era un amplificatore di tensione. Il circuito ha  $G_{id}=-10$  a bassa frequenza ed il polo alla frequenza di 15.9kHz che definisce la banda passante del circuito nel caso ideale. La rappresentazione di Bode del modulo e della fase del guadagno di tensione è la seguente :



b) Il guadagno di anello del circuito vale:

$$G_{loop}(s) = -G_m \cdot R_1 = -30$$

non dipendente dalla frequenza. Questo perché la corrente in uscita dall'OTA è non può che circolare tutta fino a  $R_1$  incurante della presenza della capacità.

c) Dall'espressione del guadagno :

$$G(s) = G_{id}(s) \frac{-G_{loop}(s)}{1-G_{loop}(s)} + G_{dir}(s) \frac{1}{1-G_{loop}(s)}$$

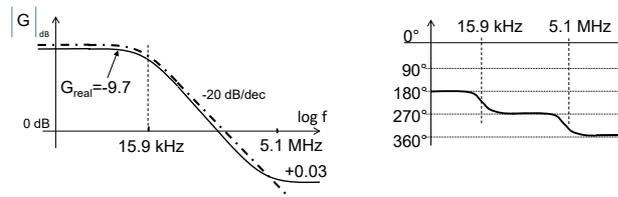
si ottiene quindi per sostituzione dei vari termini :

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+sCR_2} \cdot \frac{30}{31} + 1 \cdot \frac{1}{31}$$

Il guadagno diretto è infatti  $G_{dir}(s)=+1$  perché l'impedenza di uscita dell'OTA è infinita e quindi un segnale in ingresso si trasmette in uscita invariato attraverso la retroazione non potendo scorrere corrente nelle resistenze. Inserendo i valori per disegnare il diagramma di Bode quotato si ottiene:

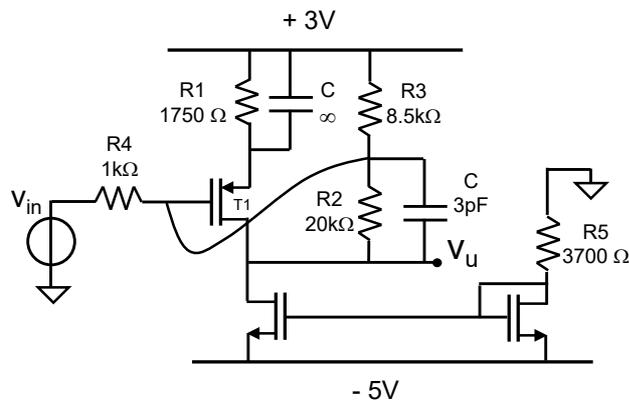
$$G_{real}(s) = -9.7 \cdot \frac{1}{1+sCR_2} + 0.03$$

da cui si ottengono i seguenti grafici :



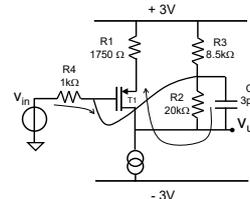
Il polo del circuito retroazionato rimane quindi alla frequenza di **15.9kHz**. Il guadagno diretto semplicemente fissa un limite alla diminuzione del guadagno dopo il polo.

- E12.10** Si consideri l'amplificatore disegnato sotto avente tutti i MOSFET con  $|V_T|=0.6V$ ,  $|k|=800\mu A/V^2$  e  $V_a=\infty$
- Calcolare la tensione dell'uscita in assenza di segnale.
  - Calcolare il **guadagno ideale**  $v_u/v_{in}$  del circuito in funzione della frequenza e rappresentarlo graficamente in un diagramma di Bode.
  - Calcolare il **comportamento del circuito reale** e la sua banda passante.

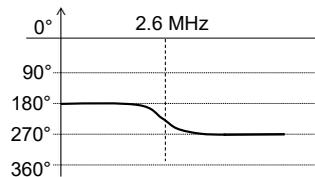
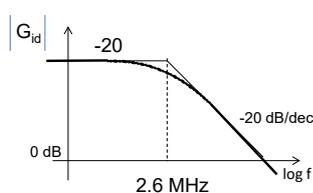


a) Lo specchio porta circa  $905\mu A$ , il transistore di ingresso circa  $700\mu A$  e quindi  $V_u \approx -3V$ . Tutti i transistori sono ben polarizzati.  $g_m=1.6mA/V$ .

b) A fronte di un segnale  $v_{in}$  positivo, il circuito reagisce richiamando corrente da  $R2||C$  e mantenendo la tensione del gate di T1 sostanzialmente ferma. In R3 la corrente non scorre perché la tensione ai suoi capi non cambia. Il guadagno ideale è quindi pari a :



$$G_{id} = \frac{v_u(s)}{v_{in}(s)} = -\frac{R_2}{R_4} \frac{1}{1 + sR_2C}$$

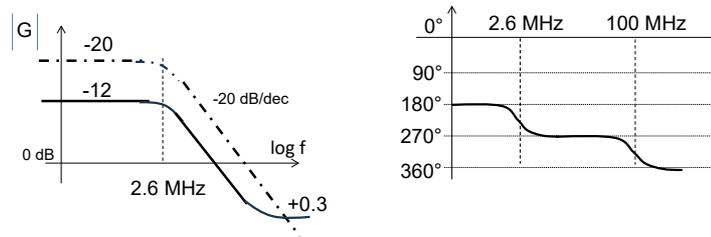


c) Il guadagno di anello (trascurando  $C=\infty$  che introduce un polo ed uno zero entrambi a 0Hz) risulta essere  $G_{loop}(s) = -R_3||R_4g_m \approx -1.6$  e quindi, benchè indipendente dalla frequenza, molto piccolo. L'andamento reale del circuito avrà pertanto lo stesso polo di  $G_{id}$  ma si discosterà come valore di guadagno da come previsto nel caso ideale secondo l'espressione nota :

$$G(s) = G_{id}(s) \frac{-G_{loop}(s)}{1-G_{loop}(s)} + G_{dir}(s) \frac{1}{1-G_{loop}(s)}$$

In questo caso può essere opportuno calcolare  $G_{dir}=+0.9$  in modo da ottenere il valore effettivo di guadagno pari a :

$$G(s) = -20 \cdot \frac{1}{1+sCR_2} \cdot \frac{1.6}{2.6} + 0.9 \cdot \frac{1}{2.6} \cong -12$$



Provate a modificare il circuito per ottenere un più grande valore  $G_{loop}(0)$ .

### 12.3 CIRCUITI CON OPERAZIONALI: polo nel ramo di andata A(s)

Quanto visto nei paragrafi precedenti ci permette di analizzare qualunque circuito retroazionato. Qui vediamo quali ulteriori considerazioni possiamo acquisire nel caso pratico frequente in cui si usi un amplificatore operazionale (impedenza di ingresso infinitamente alta ed impedenza di uscita tendente a zero) nel ramo di andata del circuito retroazionato che quindi è ben descritto dal suo guadagno A(s).

Per semplicità, partiamo analizzando il caso illustrato nella Fig.12.7 in cui il circuito abbia un solo polo nel ramo di andata (i.e. il guadagno ideale non avrà poli e zeri) e sia costituito da blocchi di andata e di reazione unidirezionali, equivalente a dire che non ci sia guadagno diretto, come effettivamente è in pratica grazie all'impedenza nulla in uscita dell'OpAmp.

La funzione di **trasferimento reale** G(s) del circuito ha la seguente espressione:

$$G(s) = \frac{\frac{A_0}{1+s\tau}}{1 - \frac{A_0}{1+s\tau} F_0} = \frac{A_0}{1-G_{loop}(0)} \cdot \frac{1}{1+s\frac{\tau}{1-G_{loop}(0)}} \quad (12.11 a)$$

o equivalentemente

$$G(s) = G_{id} \cdot \frac{-G_{loop}(s)}{1-G_{loop}(s)} = G_{id} \cdot \frac{-G_{loop}(0)}{1-G_{loop}(0)} \cdot \frac{1}{1+s\frac{\tau}{1-G_{loop}(0)}} \quad (12.11 b)$$

Nell'ipotesi di reazione negativa, per cui  $A_0 F_0 < 0$ , le (12.11) ci permettono di riflettere su due risultati estremamente interessanti:

i) la **riduzione dell'amplificazione a bassa frequenza** del circuito rispetto a quanto si otterrebbe in assenza della reazione, ( $G_{NO}$ ):

$$G_{NO}(0) = A_0 \quad \rightarrow \quad G(0) = \frac{A_0}{1 - G_{loop}(0)}$$

Questo risultato ci era già noto dal Cap.10: quando retroazioniamo un circuito il suo guadagno diminuisce proprio del fattore  $(1-G_{loop})$ ;

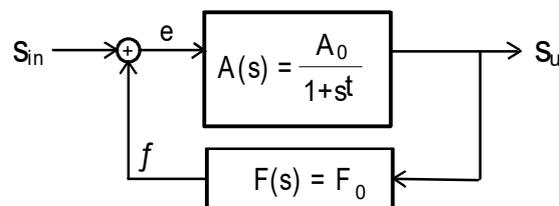


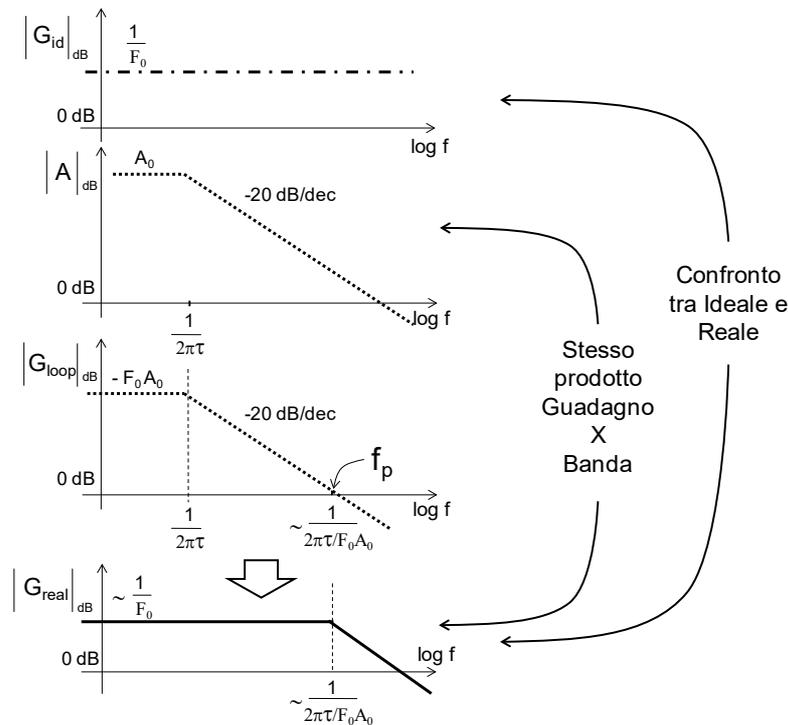
Fig. 12.7 Sistema reazionato a singolo polo nello stadio di andata.

ii) un aumento della banda passante dovuto allo spostamento del polo:

$$f_{NO|-3dB} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau} \quad \rightarrow \quad f_{-3dB} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\tau}{1-G_{loop}(0)}} \quad (12.12)$$

sempre in ragione della quantità  $1-G_{loop}(0)$ . Inoltre la Fig.12.8 mostra :

- i) il diagramma di Bode del guadagno ideale del circuito. Esso risulta costante indipendente dalla frequenza e pari a  $1/F_0$  ;
- ii) la risposta del solo amplificatore di andata  $A(s)$  in cui si nota il suo polo alla frequenza  $1/2\pi\tau$  ;
- iii) il guadagno di anello  $G_{loop}(s)$  del circuito che mostra anch'esso ovviamente lo stesso polo  $1/2\pi\tau$  dello stadio di andata, ma che risulta avere un guadagno a bassa frequenza più basso di  $A(s)$  per via della partizione con  $F_0$ . Questo fa sì



**Fig. 12.8** Sistema reazionato a singolo polo come quello della Fig.12.7: guadagno ideale,  $G_{id}$ ; guadagno dello stadio di andata,  $A(s)$ ; guadagno di anello,  $G_{loop}(s)$ ; guadagno ideale,  $G_{id}(s)$ . Si noti come la banda del circuito reazionato sia aumentata rispetto a quella del solo stadio di andata.

che la curva di  $G_{loop}(s)$  tagli l'asse a 0dB (punto  $f_p$  del grafico) ad una frequenza un po' più bassa di quanto avvenga in  $A(s)$ ;

- iv) la stima dell'andamento del **guadagno reale**, che è simile a  $G_{id}$  fino alla frequenza in cui il circuito è sufficientemente reazionato ( $G_{loop} > 1$ ), attorno a  $f_p$ , e poi degrada con la stessa pendenza dello stadio di andata.

Anche in questo caso concludiamo che *il solo calcolo di  $G_{id}(s)$  e di  $G_{loop}(s)$  permettono di ottenere un'ottima stima e comprensione dell'effettiva funzione di trasferimento di un circuito retroazionato. Essa sarà praticamente coincidente con il guadagno ideale fintanto che  $G_{loop}$  rimane elevato ( $> 1$ ).*

Si noti inoltre che in circuiti a singolo polo di questo tipo il prodotto *Guadagno x Banda* (*Gain Bandwidth Product - GBWP*) resta costante qualunque sia il valore di  $G_{loop}(0)$ . Infatti se la retroazione non agisse ( $G_{loop}=0$ ), il GBWP sarebbe quello dell'OpAmp :

$$GBWP = \frac{A_0}{2\pi \cdot \tau}$$

Se invece la retroazione agisse ( $G_{loop}$  finito), come può essere desunto dall'ultimo grafico di Fig.12.8, il GBWP sarebbe:

$$GBWP = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \tau / A_0 F_0} = \frac{A_0}{2\pi \cdot \tau}$$

uguale al precedente. Questo ci dice che le prestazioni di un circuito reazionato realizzato con OpAmp hanno un limite (in guadagno e/o in banda) oltre cui non si può andare, limite definito dal GBWP dell'amplificatore di andata, comunque si vari il guadagno d'anello. Per questo i produttori di amplificatori operazionali forniscono il valore di GBWP dei loro OpAmp in modo da guidare la scelta verso quello che riesca a soddisfare meglio le esigenze di progetto.

Poichè l'anello dispone di un solo polo, lo **sfasamento** che il segnale subisce nel percorrerlo è al massimo di  $180^\circ + 90^\circ$  ( $180^\circ$  sono dovuti alla inversione necessaria per avere retroazione negativa). Il sistema è quindi sempre stabile. Questa conclusione è desumibile anche dall'ultimo grafico della Fig.12.8: il guadagno d'anello che taglia l'asse a 0dB con una pendenza massima di 20dB/dec assicura uno sfasamento addizionale massimo di  $90^\circ$  e quindi la stabilità del circuito.

### 12.3.1 La rappresentazione compatta di Bode

I produttori di Amplificatori Operazionali sono soliti nei loro Data Sheet sovrapporre i grafici della Fig.12.8 in un unico grafico, come quello mostrato nella Fig.12.9. Essa riporta in maniera visivamente compatta :

- i) l'andamento del modulo del guadagno di andata  $A(j\omega)$  (secondo grafico in Fig.12.8)
- ii) l'andamento del trasferimento reale del circuito reazionato  $G(j\omega)$  (ultimo grafico in Fig.12.8).

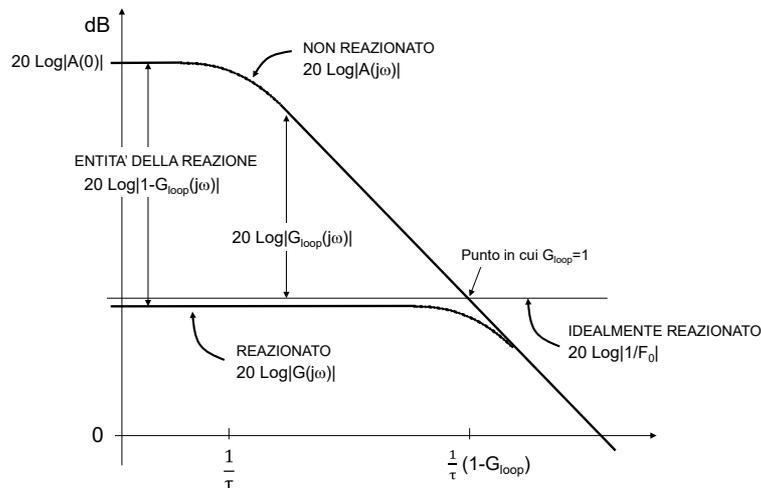
La **distanza tra la curva di  $A(j\omega)$  e quella di  $G(j\omega)$**  è ricavabile dalla (12.11)  $G(s)=A(s)/(1-G_{loop}(s))$  :

$$20 \cdot \log|A(j\omega)| - 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log|1 - G_{loop}(j\omega)| \quad (12.13)$$

e quindi **rappresenta quantitativamente l'entità della reazione.**

Anche il trasferimento ideale può essere tracciato sullo stesso grafico utilizzando la (12.11) e la (12.13) :

$$20 \cdot \log\left|\frac{1}{F_0}\right| = 20 \cdot \log|A(j\omega)| - 20 \cdot \log|G_{loop}(j\omega)| \quad (12.14)$$



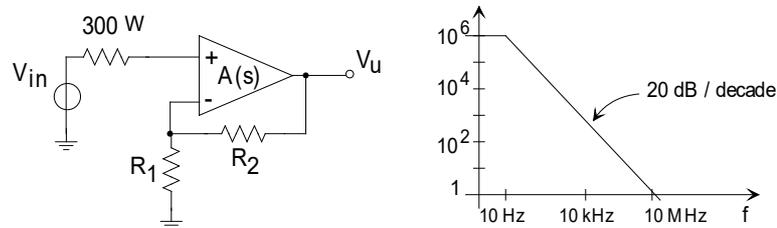
**Fig. 12.9** *Rappresentazione compatta di un sistema reazionato negativamente avente un singolo polo nello stadio di andata,  $A(s)$ . Essa riassume i 4 grafici della Fig.12.8.*

A bassa frequenza, quando  $|G_{loop}(j\omega)| \gg 1$ , il trasferimento reale coincide praticamente con quello ideale,  $G(j\omega) \cong -1/F_0$ . Quando la frequenza è elevata invece il valore di  $|G_{loop}(j\omega)|$  diminuisce e  $G(j\omega)$  si scosta sempre di più da  $-1/F_0$  e tende a  $A(j\omega)$ . La frequenza a cui  $A(j\omega)$  attraversa la retta  $1/F_0$  è la frequenza a cui  $|G_{loop}(j\omega)|=1$ . Per  $\omega \rightarrow \infty$  la curva di  $G(j\omega)$  e quella di  $A(j\omega)$  si sovrappongono, come ci si attende dalla (12.11) per  $|G_{loop}(j\omega)| \rightarrow 0$ .

La Fig.12.9 sintetizza questi aspetti ed evidenzia come:

- un aumento di  $G_{loop}(0)$  comporti un aumento della frequenza del polo del circuito reazionato (punto di intersezione della retta  $1/F_0$  con la curva  $A(j\omega)$ );
- solo nel ben definito intervallo di frequenze dove  $|G_{loop}(j\omega)| \gg 1$  il circuito è ben reazionato e quindi il trasferimento del sistema non è influenzato dalle tolleranze e dalle variazioni degli elementi attivi presenti nel blocco d'andata ma dipende dai soli elementi che realizzano il blocco di reazione. Alla frequenza del polo del circuito reazionato gli effetti della retroazione si sono ormai esauriti quasi completamente essendo  $G_{loop} = -1$  ed il trasferimento torna ad essere influenzato dal blocco d'andata.

**E12.11** Calcolare il massimo guadagno che si può ottenere in banda audio (20Hz-20kHz) dall'amplificatore in figura, utilizzando un operazionale con polo dominante a 10Hz, guadagno in continua di 120dB e quindi  $GBWP=10MHz$ . Si progetti il circuito in modo che su tutta la banda considerata la retroazione sia sufficientemente forte ( $G_{loop} > 10$  per  $f \leq 20kHz$ ) da garantire buona stabilità.

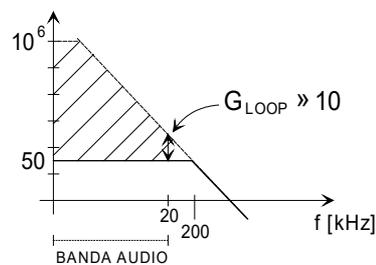


La reazione deve essere tale da estendere la banda passante del circuito dagli iniziali 10Hz, quando non è reazionato (ad esempio  $R_2 = \infty$ ), ad almeno 20kHz come richiesto per le applicazioni audio. Volendo che a 20kHz il guadagno di anello sia almeno di 10, occorre porre il polo del circuito reazionato una decade oltre in frequenza. Tenendo presente il comportamento in frequenza dell'operazionale in cui il prodotto Guadagno-Banda rimane costante ed

aiutandosi con la rappresentazione grafica di Bode, si ottiene un guadagno massimo ottenibile di 50 (34dB), realizzabile ad esempio con  $R_1=1k\Omega$  e  $R_2=49k\Omega$ . Il circuito è stabile perchè il guadagno d'anello

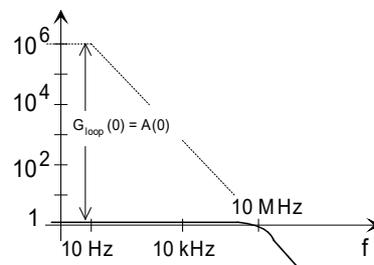
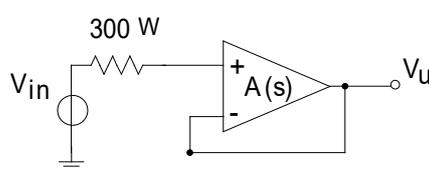
$$G_{loop}(s) = A_o \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + s\tau}$$

corrispondente alla parte tratteggiata nella figura, taglia l'asse a 0dB con una pendenza di 20dB/dec. Il grafico mostra anche, frequenza per frequenza, l'entità della reazione.



**E12.12** *Quale è la massima banda passante ottenibile da un circuito che impieghi l'operazionale dell'esercizio precedente ed in quale configurazione?*

In un sistema a singolo polo, o anche in un sistema più complesso ma ben approssimabile ad uno a singolo polo (amplificatori a polo dominante), la massima banda utilizzabile è proprio la GBWP, ottenuta quando il sistema guadagna 1 cioè quando la reazione è totale ( $G_{loop}(0)=A(0)$ ): 10MHz.



Dato il suo interesse pratico, il valore di GBWP viene messo in risalto nei data-sheet dei costruttori e costituisce uno dei più importanti elementi di giudizio nella scelta di un operazionale. Il grafico di destra mostra anche, per differenza tra l'OpAmp ed il guadagno finale, l'andamento in frequenza di  $G_{loop}(s)$ .

## 12.4 CIRCUITI RETROAZIONATI CON PIU' POLI

In generale un circuito reazionato contiene più di un elemento reattivo e quindi la sua analisi in frequenza comporta la ricerca di più di un polo ed eventualmente anche di zeri. Ricordando la (12.2)

$$1 - G_{loop}(s) = 0 \quad (12.2)$$

essa assume in generale la seguente espressione:

$$1 - G_{loop}(0) \cdot \frac{(1 \pm s\tau_{z1})(1 \pm s\tau_{z2}) \dots (1 \pm s\tau_{zm})}{(1 + s\tau_{p1})(1 + s\tau_{p2}) \dots (1 + s\tau_{pn})} = 0 \quad (12.15)$$

dove il segno del guadagno d'anello in continua,  $G_{loop}(0)$  coincide con il segno della reazione, nel nostro caso sempre negativo<sup>1</sup>. Si ricordi che i poli di  $G_{loop}(s)$  sono tutti con parte reale negativa, mentre gli zeri possono essere sia nel semipiano sinistro che in quello destro del piano complesso. L'equazione (12.15) può essere riscritta come:

$$(1 + s\tau_{p1}) \dots (1 + s\tau_{pn}) - G_{loop}(0) [(1 \pm s\tau_{z1}) \dots (1 \pm s\tau_{zm})] = 0$$

Questa espressione consente di identificare immediatamente i poli del circuito retroazionato in due situazioni limite :

per  $G_{loop}(0) \rightarrow 0$  ovvero in assenza di reazione, i poli del circuito retroazionato sono dati da  $(1 + s\tau_{p1})(1 + s\tau_{p2}) \dots (1 + s\tau_{pn}) = 0$ , cioè coincidono con i poli di  $G_{loop}(s)$ ;

per  $G_{loop}(0) \rightarrow \infty$  i poli di  $G(s)$  sono dati da  $(1 \pm s\tau_{z1})(1 \pm s\tau_{z2}) \dots (1 \pm s\tau_{zm}) = 0$ , cioè tendono agli zeri di  $G_{loop}(s)$ .

All'aumentare di  $G_{loop}(0)$ , e quindi dell'intensità della reazione, i poli del circuito retroazionato si spostano nel piano complesso allontanandosi dai poli di  $G_{loop}(s)$  per giungere ai suoi zeri, al finito o all'infinito. Il numero dei suoi zeri all'infinito è quindi pari alla differenza tra il numero dei suoi poli ed il numero dei suoi zeri al finito.

---

<sup>1</sup>  $G_{loop}(0)$  è non nullo purché non abbia zeri nell'origine ( $s=0$ ). In pratica, nei circuiti di nostro interesse,  $G_{loop}(0)$  non è nullo se nell'amplificatore d'andata non ci sono condensatori di disaccoppiamento, come abbiamo visto nel Cap.9.

### 12.4.1 Luogo delle radici : trattazione generale

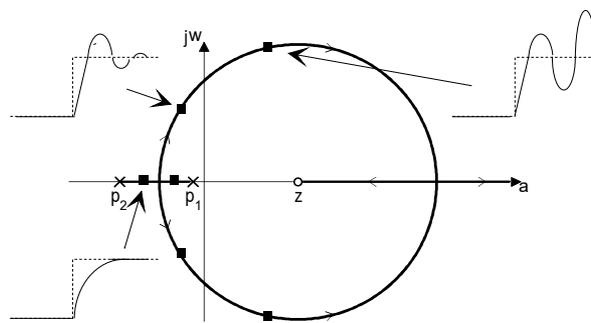
Come visto nel §12.2, per determinare la posizione esatta dei poli è necessario risolvere l'equazione complessa (12.15), cioè trovare quei valori di  $s$  che soddisfano contemporaneamente alle condizioni

$$\begin{cases} \arg[G_{loop}(s)] = \arg[1] = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ & (12.16a) \\ |G_{loop}(s)| = 1 & (12.16b) \end{cases}$$

Si noti che mentre la soluzione della (12.16b) dipende dal valore del fattore di intensità  $G_{loop}(0)$ , la (12.16a), essendo una relazione sulle fasi, è influenzata solo dal segno di  $G_{loop}(0)$ . Quindi è opportuno iniziare a risolvere per prima la (12.16a) così da individuare sul piano complesso il luogo di punti, detto **luogo delle radici**, delle possibili soluzioni. Esso può essere tracciato conoscendo solo la posizione delle singolarità di  $G_{loop}(s)$  ed il segno della reazione ma indipendentemente dalla sua intensità. **Il luogo avrà tanti rami quanti sono i poli di  $G_{loop}(s)$ .**

Il valore numerico di  $G_{loop}(0)$  viene usato come parametro per risolvere la seconda equazione (12.16b). Un fissato valore di  $|G_{loop}(0)|$  determina un punto esatto su ogni ramo del luogo e fornisce i vari poli del circuito reazionato.

Nel caso di più poli e zeri nel guadagno di anello, il luogo delle radici nasce sempre nel semipiano sinistro (i poli di  $G_{loop}(s)$  sono sempre nel semipiano sinistro) ma può avere alcuni suoi rami che, tendendo nel piano complesso agli zeri (al finito o all'infinito), si estendono anche nel semipiano destro. Questo è il caso ad esempio del luogo riportato nella Fig.12.10, relativo ad un circuito con due poli ed uno zero destro nel guadagno d'anello. Al variare del parametro di taratura



**Fig. 12.10** Luogo delle radici di un sistema reazionato negativamente avente un  $G_{loop}(s)$  con due poli ed uno zero nel semipiano destro.

$|G_{loop}(0)|$  i poli del circuito reazionato non solo possono diventare complessi coniugati ma addirittura avere parte reale positiva. Nel primo caso la risposta del circuito ad una sollecitazione a gradino tenderà al valore asintotico con una oscillazione smorzata di frequenza pari al coefficiente della parte immaginaria dei poli complessi coniugati; nel secondo caso, l'oscillazione in uscita sarà addirittura divergente in ampiezza e porterà alla saturazione dell'uscita ed al conseguente non funzionamento del circuito. Utilizzando la (12.16b) è possibile determinare il valore massimo di  $|G_{loop}(0)|$  per cui tutti i poli restano nel semipiano sinistro, garantendo la stabilità del sistema.

### 12.4.2 Regole di tracciamento del luogo

Quando si ha a che fare con tanti poli e zeri non è immediato tracciare il luogo delle radici, cioè individuare l'insieme dei punti  $s$  del piano di Gauss che soddisfano alla relazione (12.16a) e conseguentemente tarare con ragionevole precisione il luogo ottenendo i poli effettivi del circuito. E' comodo a tal fine riscrivere la (12.15) nella forma:

$$1 - G_{loop}(0) \cdot \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}\dots\tau_{zm}}{\tau_{p1}\tau_{p2}\dots\tau_{pn}} \cdot \frac{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{z1}}\right)\right)\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{z2}}\right)\right)\dots\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{zm}}\right)\right)}{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p1}}\right)\right)\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p2}}\right)\right)\dots\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{pn}}\right)\right)} = 0 \quad (12.17)$$

Pertanto, si potrebbe pensare di operare individuando per tentativi i punti  $s$  del piano complesso tali che la somma degli angoli formati con l'asse orizzontale dai vettori congiungenti  $s$  con gli zeri di  $G_{loop}(s)$ , diminuita della somma degli angoli formati con l'asse orizzontale dai vettori congiungenti  $s$  con i poli di  $G_{loop}(s)$ , sia pari a  $180^\circ \pm k360^\circ$  dovuto al termine

$$\gamma = G_{loop}(0) \cdot \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}\dots\tau_{zm}}{\tau_{p1}\tau_{p2}\dots\tau_{pn}} \quad (12.18)$$

reale negativo. Se dal punto di vista concettuale questo modo di procedere è corretto, nella pratica, all'aumentare del numero dei poli e degli zeri, si incontrano crescenti difficoltà. MATLAB ha l'istruzione specifica "RLOCUS" per risolvere questo problema.

Riassumiamo nel seguito alcune delle considerazioni che possono aiutare a disegnare il luogo :

- Il luogo è costituito da tanti rami quanti sono i poli di  $G_{loop}(s)$ . Ogni ramo rappresenta il movimento di un polo del circuito reazionato al variare della forza della retroazione  $|G_{loop}(0)|$ .

- I rami del luogo delle radici hanno un verso di percorrenza diretto dai poli di  $G_{loop}(s)$  (per  $G_{loop}(0)=0$ ) ai suoi zeri (per  $G_{loop}(0)=\infty$ ). Gli zeri non presenti al finito sono all'infinito. Ad essi il ramo del luogo tende asintoticamente.
- Le direzioni degli asintoti, ovvero gli angoli  $\varphi$  da essi formati con l'asse reale del piano di Gauss, soddisfano alla relazione:

$$\arg[\gamma] + (m - n)\varphi = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (12.19)$$

Infatti, rispetto ai punti all'infinito del piano di Gauss visti sotto l'angolo  $\varphi$  (la direzione dell'asintoto), tutti gli  $m$  zeri al finito contribuiscono ad uno sfasamento pari ad  $m\varphi$ , mentre gli  $n$  poli determinano uno sfasamento  $-n\varphi$ . Per esempio se si hanno 3 poli ed 1 zero,  $(m-n)=-2$ , la direzione degli asintoti è:

$$\varphi = \frac{180^\circ \pm k \cdot 360^\circ}{2} = \begin{matrix} 90^\circ & (\text{per } k = 0) \\ 270^\circ (-90^\circ) & (\text{per } k = 1) \end{matrix} .$$

Se invece  $G_{loop}(s)$  ha solo 3 poli,  $(m-n)=-3$ , per cui si ha:

$$\varphi = \frac{180^\circ \pm k \cdot 360^\circ}{3} = \begin{matrix} 60^\circ & (\text{per } k = 0) \\ 180^\circ & (\text{per } k = 1 \text{ con segno } +) \\ -60^\circ & (\text{per } k = 1 \text{ con segno } -) \end{matrix}$$

- il punto di incontro degli asintoti sull'asse reale è soluzione dell'equazione

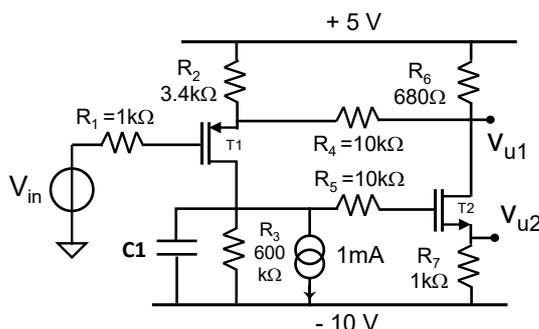
$$p_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n - m} \quad (12.20)$$

- Se le singolarità sono tutte reali, il luogo si allontana dall'asse reale in corrispondenza di punti di diramazione, la cui ascissa  $p_d$  soddisfa l'equazione

$$\sum_i \frac{1}{p_d - p_i} - \sum_j \frac{1}{p_d - z_j} = 0 \quad (12.21)$$

**E 12.13**

Analizzare il comportamento in frequenza del circuito seguente, utilizzando transistori con  $V_T=0.6V$  e  $k=1mA/V^2$ , già visto nei Cap.10 e Cap.11.



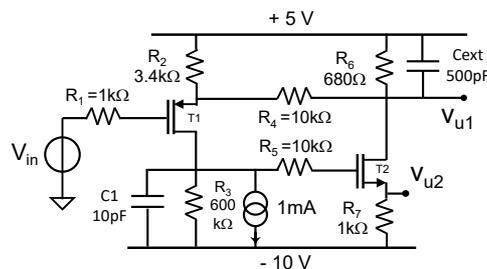
- Calcolare la tensione stazionaria delle due uscite  $V_{u1}$  e  $V_{u2}$  in assenza di segnale; calcolare i due Guadagni ideali,  $G_{id1}=v_{u1}/v_{in}$  e  $G_{id2}=v_{u2}/v_{in}$ ; calcolare il guadagno di anello  $G_{loop}(0)$  del circuito ed i due guadagni reali.
- Dimensionare la capacità  $C1$  affinché la banda passante del circuito sia di 717 kHz. Convincersi che la banda sia uguale sia per  $G_1$  che per  $G_2$ .
- Supportare una ulteriore capacità di carico  $C_{ext}=500pF$  all'uscita  $V_{u1}$  (quindi in parallelo a  $R_6$ ). Calcolare i poli del circuito in questa situazione con entrambe le capacità  $C1$  e  $C_{ext}$  presenti.
- Disegnare l'andamento nel tempo del segnale di uscita  $V_{u1}(t)$  in risposta ad un gradino di 10mV positivo in ingresso.
- Disegnare in un diagramma quotato l'andamento del modulo e della fase dei Diagrammi di Bode del guadagno del circuito verso l'uscita  $V_{u1}$ .
- Calcolare l'intervallo di valori di  $C_{ext}$  oltre cui il circuito viene ad avere due poli complessi coniugati per cui il circuito presenta una sovraoscillazione in risposta ad un gradino in ingresso.

- $V_{u1}=V_{out2}=0.7V$  e  $g_{m1}=2mA/V$ ,  $1/g_{m1}=500\Omega$ ,  $g_{m2}=4.5mA/V$ ,  $1/g_{m2}=220\Omega$ .  $G_{id1}=+3.9$  e  $G_{id2}=-6.1$ . Non deve stupire che un unico circuito abbia più uscite, entrambe stabilizzate dal meccanismo della retroazione, unico in tutto il circuito. Questa è una caratteristica che può essere sfruttata molto efficacemente in varie applicazioni.  $G_{loop}=-26$ .  $G_{real1}=+3.75$  e  $G_{real2}=-5.9$ .

- b)  $C1=10\text{pF}$ . Essendo l'anello unico nel circuito, entrambe le uscite hanno la stessa dinamica temporale data dallo stesso polo, e quindi la stessa banda passante.
- c) L'analisi del circuito con  $C_{\text{ext}}=500\text{pF}$  ci porta alla seguente espressione di  $G_{\text{loop}}(s)$ :

$$G_{\text{loop}}(s) = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1}{(1 + s\tau_1)} \frac{1}{(1 + s\tau_2)}$$

in cui  $G_{\text{loop}}(0)=-26$ ,  $f_1=1/2\pi\tau_1=26.5\text{kHz}$  e  $f_2=1/2\pi\tau_2=497\text{kHz}$ .



Conviene riscrivere il guadagno di anello nella forma

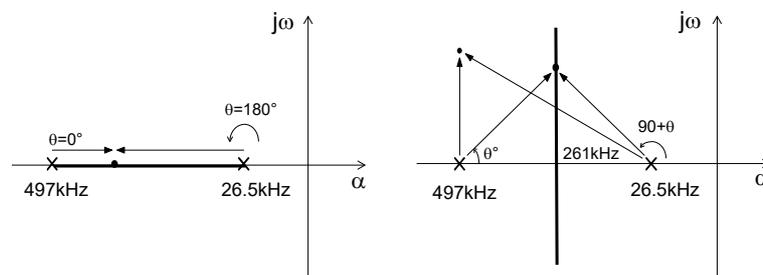
$$G_{\text{loop}}(s) = G_{\text{loop}}(0) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \frac{1}{\left(s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right) \left(s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right)}$$

dove il termine  $G_{\text{loop}}(0)f_1f_2$  è negativo. L'equazione sugli argomenti ci dice che i punti del luogo devono soddisfare l'equazione

$$\arg\{G_{\text{loop}}(0) \cdot f_1 \cdot f_2\} - \arg\left\{s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right\} - \arg\left\{s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right\} = 0^\circ$$

È facile verificare che i punti del luogo sono :

- nel tratto compreso tra i due poli di  $G_{\text{loop}}(s)$ ,  $f_1$  e  $f_2$ , oppure
- lungo i due asintoti che si dipartono dal punto medio del segmento tra i due poli. Infatti solo per l'asse del segmento gli angoli formati dai due vettori congiungenti il punto  $s$  con i due poli e l'asse reale orientato positivamente sono sempre supplementari.



I due poli  $f_1^*$  e  $f_2^*$  del circuito retroazionato avente  $|G_{loop}(0)|=26$  sono i punti del luogo per cui è soddisfatta anche la relazione dei moduli :

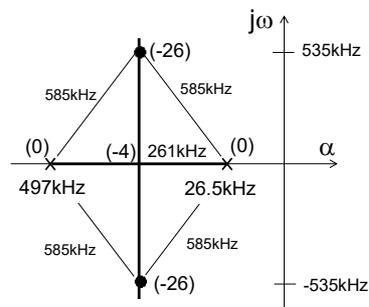
$$|G_{loop}(0)| \cdot |f_1| \cdot |f_2| = \left| s - \left( -\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1} \right) \right| \cdot \left| s - \left( -\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2} \right) \right|$$

Essa può essere interpretata graficamente individuando, a destra, il prodotto tra le distanze di un punto  $s$  del luogo con i due poli del guadagno di anello. I due poli  $p_1^*$  e  $p_2^*$  del circuito retroazionato sono i due punti del luogo che, separatamente, soddisfano l'equazione.

Per capire se i poli sono reali e distinti (cioè stanno sull'asse reale) oppure se sono complessi coniugati, si può calcolare quale sarebbe il valore di  $G_{loop}(0)$  per averli coincidenti nel punto di diramazione. In questo caso la relazione sarebbe

$$G_{loop}(0) = \frac{235\text{kHz} \cdot 235\text{kHz}}{26.5\text{kHz} \cdot 497\text{kHz}}$$

che fornisce  $G_{loop}(0)=-4$ . Poiché nel nostro caso  $G_{loop}(0)=-26$ , i 2 poli del circuito retroazionato dovranno necessariamente trovarsi nei due rami verticali. Poiché la lunghezza delle due ipotenuse  $\left| p_1^* - (-1/2\pi \cdot \tau_1) \right|$  e  $\left| p_1^* - (-1/2\pi \cdot \tau_2) \right|$  è la stessa, i poli devono soddisfare la relazione  $\left| s - (-1/2\pi \cdot \tau) \right| = \sqrt{3.4 \cdot 10^{11}} = 585\text{kHz}$ .



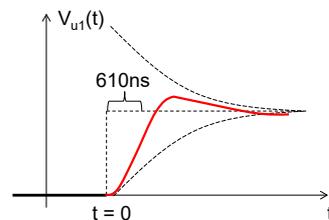
Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli si ottengono i due poli complessi coniugati del circuito retroazionato di partenza

$$f_{1,2}^* = -261\text{kHz} \pm j 535\text{kHz}$$

- d) Quando si dà un gradino di tensione all'ingresso di 10mV (cioè quando si sollecitano tutte le frequenze dello spettro) il circuito reagisce mostrando la sua risposta di vibrazione libera :

$$v_u(t) = 37.5\text{mV} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Essa quindi sarà oscillatoria alla frequenza del coefficiente della parte immaginaria del polo, 535kHz (quindi con periodo di 1.9μs) e smorzata in ampiezza in un tempo legato alla parte reale del polo,  $\tau = 1/\alpha = 610\text{ns}$ . Per disegnarne l'andamento nel tempo devo quindi concludere che in circa  $5\tau$  vedrò



meno di un periodo di oscillazione. Il segnale di uscita mostra quindi una sovraoscillazione smorzata di circa il 10% maggiore del valore asintotico.

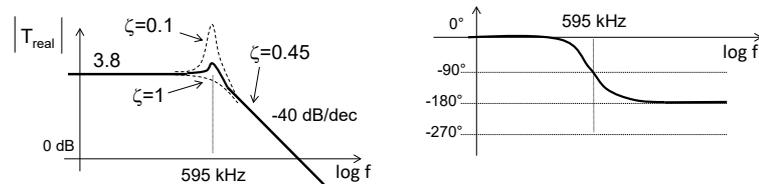
- e) Per passare dalle coordinate dei poli sul piano complesso al diagramma di Bode del trasferimento reale dobbiamo calcolare il modulo dei due poli, che definisce la frequenza di riferimento sul diagramma di Bode :

$$f = \sqrt{(261\text{kHz})^2 + (535\text{kHz})^2} = 595\text{kHz}$$

L'entità della risonanza,  $\zeta$ , che definisce quanto ci si discosta da una funzione di trasferimento con due poli reali coincidenti ( $\zeta=1$ ):

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{261\text{kHz}}{\sqrt{(261\text{kHz})^2 + (535\text{kHz})^2}} \cong 0.45$$

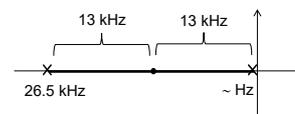
Si ottengono così i seguenti Diagrammi di Bode del trasferimento:



Se il circuito avesse in ingresso delle sinusoidi attorno ai 595kHz, queste verrebbero amplificate un po' di più rispetto alle frequenze più piccole. La presenza di due poli si manifesta con una veloce diminuzione del guadagno (pendenza di -40dB/dec) per le sinusoidi alle alte frequenze.

- f) La capacità C1 prima trovata ha definito un polo in  $G_{loop}(s)$  alla frequenza di 26.5kHz. L'aggiunta della capacità  $C_{ext}$  introduce un secondo polo, non interagente con il primo nell'anello. Esso potrà disporsi a più bassa frequenza o a più alta frequenza di 26.5kHz. Analizziamo i due casi separatamente con l'aiuto del luogo delle radici e sfruttando considerazioni geometriche.

*Secondo polo di  $G_{loop}(s)$  a frequenza bassa* : per avere due poli al più coincidenti sull'asse reale, il secondo polo sarà molto vicino all'origine degli assi. Il punto medio quindi starà attorno ai 13kHz. Usando la relazione



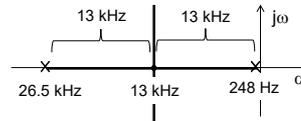
$$|G_{loop}(0)| \cdot |f_1| \cdot |f_2| = \left| s - \left( -\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1} \right) \right| \cdot \left| s - \left( -\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2} \right) \right|$$

abbiamo

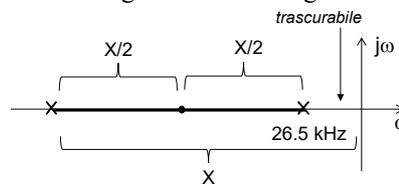
$$26 \cdot 26.5\text{kHz} \cdot \frac{1}{2\pi R_{ext} C_{ext}} \cong 13\text{kHz} \cdot 13\text{kHz}$$

dove  $R_{ext}=640 \text{ Ohm}$  è la resistenza vista da  $C_{ext}$ . Risolvendo si ottiene  $C_{ext}=1\mu\text{F}$ . La capacità  $C_{ext}$  deve quindi essere maggiore di  $1\mu\text{F}$  per evitare di avere i due poli del circuito retroazionato complessi coniugati.

La capacità trovata pone il secondo polo di  $G_{loop}(s)$  alla frequenza di  $248\text{Hz}$  (o a valori più bassi se scelta più grande), confermando la costruzione fatta.



*Secondo polo di  $G_{loop}(s)$  ad alta frequenza* : in questo caso la situazione è graficamente descritta nel luogo delle radici seguente :



Quantitativamente abbiamo:

$$26 \cdot 26.5\text{kHz} \cdot X \cong \left(\frac{X}{2}\right)^2$$

Da cui si ottiene

$$X = 2.8\text{MHz} = \frac{1}{2\pi R_{ext} C_{ext}}$$

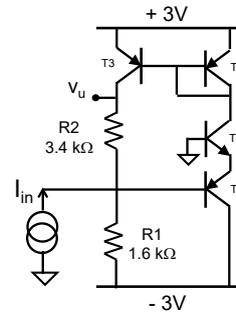
che fornisce  $C_{ext}<90\text{pF}$ . La capacità trovata pone il secondo polo di  $G_{loop}(s)$  almeno alla frequenza di  $2.1\text{MHz}$  (o più alte se si sceglie un carico ancora più piccolo) confermando la costruzione fatta.



In conclusione il circuito non presenta sovraoscillazioni di alcun tipo a patto che  $C_{ext}$  sia molto grande ( $C_{ext}>1\mu\text{F}$ ) oppure molto piccola ( $C_{ext}<90\text{pF}$ ). Per valori intermedi, il circuito sovraoscilla !

**E 12.14** Considerare il seguente circuito retroazionato, i cui BJT abbiano  $\beta=250$ ,  $V_A=\infty$  e  $C_{bc}=1pF$  dei soli due transistori T1 e T2. Tutte le altre capacità siano a zero.

- Calcolare il valore stazionario di  $V_u$ .
- Calcolare il trasferimento ideale  $T_{id}=v_u/i_{in}$ .
- Calcolare i poli del trasferimento reale tra  $i_{in}$  e  $v_u$  del circuito e disegnare in un diagramma quotato l'andamento del modulo e della fase
- Disegnare l'andamento nel tempo del segnale  $v_u(t)$  a fronte di un gradino negativo di corrente in ingresso di  $i_{in}=-10\mu A$ .



a) La tensione del nodo di ingresso risulta essere di  $-1.4V$ , la corrente nei due rami dello specchio è di  $1mA$  e  $V_u=+2V$  ( $1/g_m=25\Omega$ ).

b) La corrente  $I_{in}$  inizialmente scorrerebbe in  $R1$  e nella base del BJT, facendo alzare la tensione all'ingresso. La corrente nella base attiverebbe una corrente di segnale di collettore verso l'alto che verrebbe specchiata sull'ingresso. Nell'ipotesi di  $G_{loop}$  grandissimo, la corrente specchiata tenderebbe a i) abbassare la tensione all'ingresso, contrastando l'iniziale suo innalzamento; ii) richiamare verso l'alto la corrente  $I_{in}$  che quindi non scorrerebbe più né in  $R1$  né in  $T1$ . Ne segue che il trasferimento ideale sarebbe  $T_{id}=v_u/i_{in}=-R2=-3.4k\Omega$ , costante a tutte le frequenze perché le capacità non si trovano lungo il percorso ideale della corrente di segnale.

c) Per vedere fino a quale frequenza il circuito si comporta effettivamente come spiegato sopra, andiamo a calcolare i poli del circuito risolvendo l'equazione

$$1-G_{loop}(s)=0.$$

L'analisi ci porta alla seguente espressione di  $G_{loop}(s)$ :

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{1}{1+s\tau_1} \cdot \frac{1}{1+s\tau_2}$$

$$\text{in cui } G_{loop}(0) = -\frac{R_1 \cdot \beta}{R_1 + 2\beta/g_m} = -28 \text{ e}$$

$$f_1 = -1/2\pi \cdot \tau_1 = -1/2\pi \cdot C(R_1 \parallel 2\beta/g_m) = -112MHz,$$

$$f_2 = -1/2\pi \cdot \tau_2 = -1/2\pi \cdot C(1/g_m \parallel \beta/g_m) = -6.4GHz.$$

L'equazione sugli argomenti ci dice che i punti del luogo devono soddisfare l'equazione

$$\arg\{G_{loop}(0) \cdot f_1 \cdot f_2\} - \arg\left\{s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right\} - \arg\left\{s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right\} = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ.$$

È facile verificare che i punti del luogo sono i) nel tratto compreso tra  $f_1$  e  $f_2$  oppure ii) lungo i due asintoti che si dipartono dal punto medio del segmento tra i due poli.

I due poli  $f_1^*$  e  $f_2^*$  del circuito retroazionato avente  $|G_{loop}(0)| = -28$  sono i punti del luogo per cui è soddisfatta anche la relazione dei moduli :

$$|G_{loop}(0)| \cdot |f_1| \cdot |f_2| = \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right| \cdot \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right|$$

$$2 \cdot 10^{19} = \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right| \cdot \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right|$$

Essa può essere interpretata graficamente individuando, a destra, il prodotto tra le distanze di un punto  $s$  del luogo con i due poli del guadagno di anello. I due poli  $p_1^*$  e  $p_2^*$  del circuito retroazionato sono i due punti dei due rami del luogo che, separatamente, soddisfano l'equazione.

Per capire se i poli sono reali e distinti (cioè stanno sull'asse reale) oppure se sono complessi coniugati, si calcola il valore di  $G_{loop}(0)$  per averli coincidenti nel punto di diramazione. In questo caso la relazione sarebbe

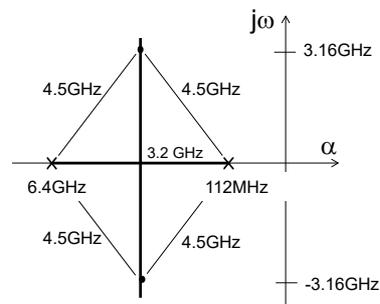
$$G_{loop}(0) = \frac{3.2\text{GHz} \cdot 3.2\text{GHz}}{112\text{MHz} \cdot 6.4\text{GHz}}$$

che fornisce  $G_{loop}(0) = -14$ . Poiché nel nostro caso  $G_{loop}(0)$  è 28 (quindi maggiore), i 2 poli del circuito retroazionato dovranno necessariamente trovarsi nei due rami verticali. I poli quindi devono soddisfare la relazione  $\left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau}\right)\right| = \sqrt{2 \cdot 10^{19}} = 4.5\text{GHz}$ , ottenendo i due poli complessi coniugati del circuito retroazionato

$$p_{1,2}^* = 3.2\text{GHz} \pm j 3.16\text{GHz}$$

Per passare dalle coordinate dei poli sul piano complesso al diagramma di Bode del trasferimento reale dobbiamo calcolare

i) il modulo dei due poli, che definisce la frequenza di riferimento sul diagramma di Bode :



$$f = \sqrt{(3.2\text{GHz})^2 + (3.16\text{GHz})^2} \cong 4.6\text{GHz}$$

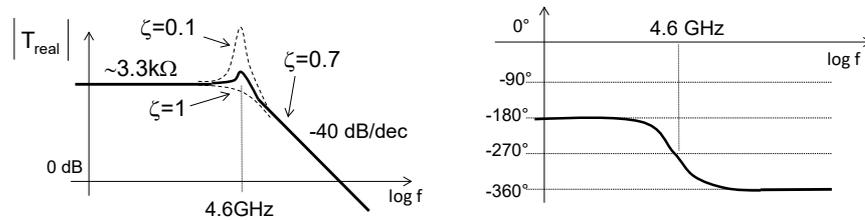
ii) l'entità della risonanza,  $\zeta$ , che definisce quanto ci si discosta da una funzione di trasferimento con due poli reali coincidenti ( $\zeta=1$ ):

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{3.2\text{GHz}}{\sqrt{(3.2\text{GHz})^2 + (3.16\text{GHz})^2}} \cong 0.7$$

iii) il valore del trasferimento reale a bassa frequenza :

$$T_{\text{real}} = -3.4\text{k}\Omega \cdot \frac{28}{29} = -3.28\text{k}\Omega$$

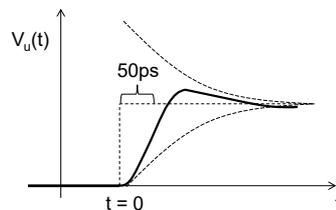
Si ottengono così i seguenti Diagrammi di Bode del trasferimento:



(d) Quando si dà un gradino di corrente all'ingresso di 10nA (cioè quando si sollecitano tutte le frequenze dello spettro) il circuito reagisce mostrando la sua risposta di vibrazione libera :

$$v_u(t) = 32.8\text{mV} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Essa quindi sarà oscillatoria alla frequenza del coefficiente della parte immaginaria del polo,  $f = \omega/2\pi = 3.16\text{GHz}$  (quindi con periodo di 316ps) e smorzata in ampiezza in un tempo legato alla parte reale del polo,  $\tau = 1/\alpha = 50\text{ps}$ . Per disegnarne l'andamento nel tempo devo quindi concludere che in circa  $5\tau$  vedrò meno di un periodo di oscillazione:



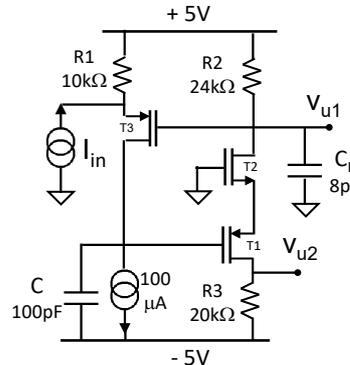
**E12.15** Si consideri il circuito accanto, utilizzando transistori con  $V_T=0.4V$ ,  $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=100\mu A/V^2$  e  $V_A=\infty$ . Il circuito è già stato visto nel Cap.10.

a) Calcolare le **tensioni stazionarie** delle due uscite  $V_{u1}$  e  $V_{u2}$ .

b) Calcolare l'espressione dei due **trasferimenti ideali**,  $T1$  e  $T2$ , del circuito verso le due uscite,  $V_{u1}$  e  $V_{u2}$  nel caso in cui sia collegato un carico capacitivo  $C_L=8pF$  all'uscita  $V_{u1}$ . Disegnarne i diagrammi di Bode quotati.

c) Quale sarebbe il **polo** del circuito se ci fosse **solo** la capacità  $C=100pF$  (senza  $C_L=8pF$ ) ? Disegnare i diagrammi di Bode dei due trasferimenti reali in questa situazione.

d) Disegnare in un grafico quotato i diagrammi di **Bode del trasferimento reale** tra  $I_{in}$  e  $V_{u2}$  con entrambe le capacità presenti.

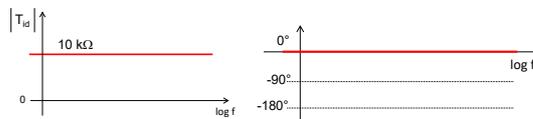


(a)  $V_{u1}=2.6V, V_{u2}=-3V$

(b) Seguendo il segnale  $i_{in}$  lungo l'anello (percorso in senso antiorario) si vede che la retroazione agisce contrastando l'ingresso di corrente in T3. Pertanto il segnale  $i_{in}$  scorre tutto in R1, alzando il potenziale dell'ingresso proprio di  $v_{in}=i_{in}\cdot R1$ . Poiché il comando di T3 è stato azzerato dalla retroazione, anche  $v_{u1}$  si muoverà della stessa quantità:

$$T1(s) = \frac{V_{u1}}{i_{in}} = R1 = 10k\Omega$$

$T1(s)$  ideale non ha alcuna dipendenza dalla frequenza. Infatti bisogna pensare che a tutte le frequenze il guadagno di anello sia grandissimo e tale quindi sempre da fare seguire il potenziale del Gate di T3 al suo Source. Se vi steste ponendo la domanda di come  $V_{u1}$  possa cambiare di valore pur essendoci una capacità  $C_L$  verso massa da caricare, notate che la carica necessaria arriva da T1 (attraverso T2) il cui comando di Gate è mosso dalla retroazione anche di quantità elevata e velocissimamente, attivando tutta la corrente necessaria per caricare  $C_L$ , anche in tempi brevissimi.



L'andamento dell'uscita  $V_{u2}$  è invece molto diversa perché la corrente attivata in R2 e  $C_L$  dallo spostamento di  $V_{u1}$  e circolante in T2 e T1, è vista da R3. Poiché questa corrente aumenta con la frequenza del segnale (ricordatevi il

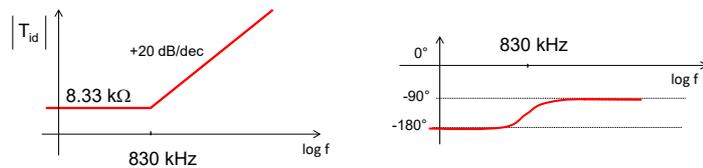
legame tensione-corrente in una capacità) la tensione  $V_{u2}$  aumenterà con la frequenza. Pertanto :

$$V_{u2} = -i_{in} \frac{R1}{R2} \cdot R3 \frac{1}{1 + sR2C_L}$$

Da cui si ottiene :

$$T2(s) = -\frac{R1 \cdot R3}{R2} \cdot (1 + sR2C_L)$$

i cui grafici di Bode sono i seguenti:



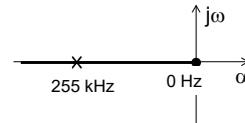
Notate che il trasferimento ha le dimensioni di una transresistenza. Pur rappresentando l'asse verticale logaritmico per consuetudine visiva, non si fa mai il calcolo in dB di una resistenza !

c) Il guadagno di anello avrà un solo polo, a  $f=0\text{Hz}$  e valore  $G_{loop}(0)$  infinito. La sua espressione sarà :

$$G_{loop}(s) = -\frac{1}{2} \cdot g_{m1} \frac{R2}{\frac{1}{g_{m3}} + R1} \cdot \frac{1}{sC}$$

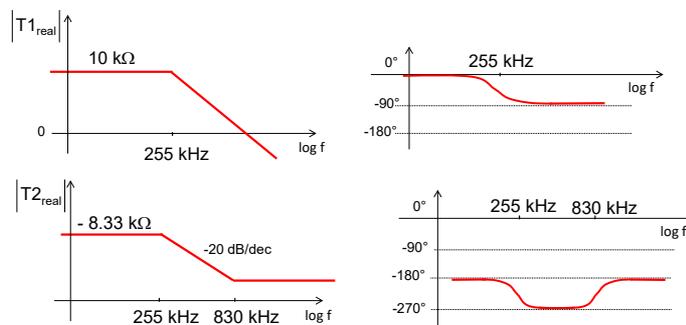
Il polo viene trovato risolvendo in  $s$  la relazione  $[1-G_{loop}(s)]=0$  il cui luogo delle radici è quello accanto :

$$s = -\frac{1}{2} \cdot g_{m1} \frac{R2}{\frac{1}{g_{m3}} + R1} \cdot \frac{1}{C}$$



ottenendo  $f_p=255\text{kHz}$ .

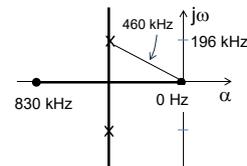
Ricordando che lo zero di  $G_{id}(s)$  si mantiene in  $G_{real}(s)$ , i diagrammi di Bode dei trasferimenti precedentemente trovati vengono quindi modificati nei seguenti :



d) La presenza anche di  $C_L=8\text{pF}$  porta ad avere due poli in  $G_{\text{loop}}(s)$  :

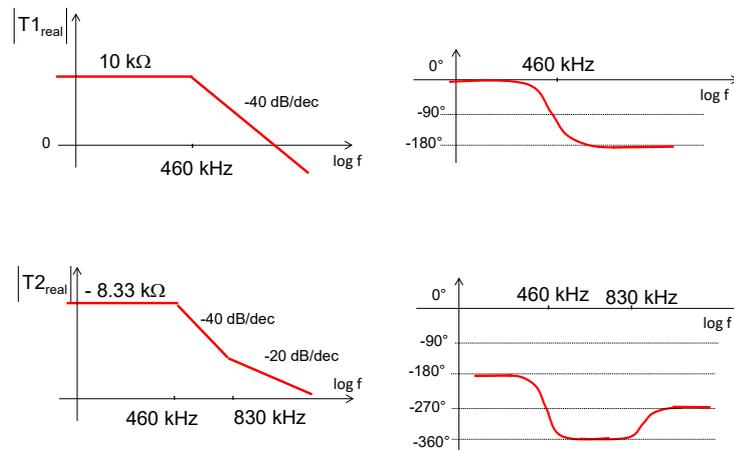
$$G_{\text{loop}}(s) = -\frac{1}{2} \cdot g_{m1} \frac{R2}{\frac{1}{g_{m3}} + R1} \cdot \frac{1}{sC} \cdot \frac{1}{(1 + sR2C_L)}$$

I due poli del circuito retroazionato sono ottenuti risolvendo di nuovo la relazione  $[1-G_{\text{loop}}(s)]=0$ , ed assicurandosi che stiano nel luogo delle radici (disegnato qui accanto), ottenendo due poli coniugati :



$$p_{1,2} = 415\text{kHz} \pm j196\text{kHz}$$

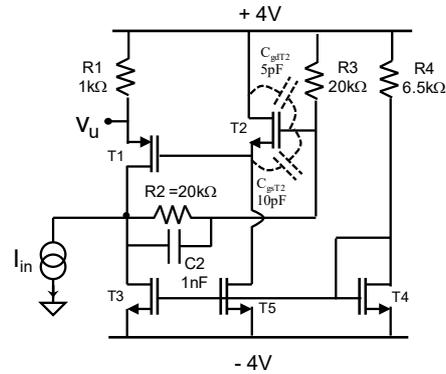
Ad essi corrispondono i seguenti diagrammi di Bode:



**E12.16**

Nel circuito della figura accanto i MOSFET hanno  $V_T=1V$ ,  $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=4mA/V^2$  e  $V_a=\infty$ . Si faccia riferimento all'esercizio E10.11 per la polarizzazione ed il guadagno ideale.

- a) Disegnare l'andamento in frequenza del modulo e della fase della funzione di trasferimento REALE del circuito nell'ipotesi in cui, oltre alla capacità C2, siano presenti le capacità parassite  $C_{gsT2}=10pF$  e  $C_{gdT2}=5pF$  del solo il transistor T2.
- b) Immaginare di aggiungere la capacità  $C1=2nF$  in parallelo all'uscita. Disegnare l'andamento in frequenza del trasferimento ideale del circuito e confrontarlo con l'andamento reale.



Dalla polarizzazione si trova  $I_{T1}\approx 955\mu A$ ,  $I_{T2}=1mA$ ,  $g_m\approx 4mA/V$  ( $1/g_m=250\Omega$ ).

(a) Il circuito ha un trasferimento  $V_u/I_{in}$  ideale piatto in frequenza e pari a  $-R1$  ( $-1k\Omega$ ). Poiché nell'amplificatore di andata vi sono delle capacità, mi aspetto che il trasferimento *reale* non sia piatto in frequenza ma presenti poli e/o zeri. Per calcolare i poli reali del circuito mi servo del calcolo del guadagno di anello e della relativa elaborazione con il luogo delle radici.

Nel calcolare il  $G_{loop}(s)$  rifletto sul fatto che :

i) La capacità C2 non comparirà nell'espressione di  $G_{loop}(s)$ . Infatti esco da T1 con un generatore di corrente a cui R2 e C2 sono posti in serie. Pertanto la corrente nell'anello attraverserà il parallelo di R2 e C2 comunque e sempre, qualunque ne siano i valori. Una impedenza in serie ad un generatore di corrente non entra mai nella funzione di trasferimento! (Se volessi fare i conti scoprirei che R2 e C2 introducono sia un polo che uno zero alla stessa frequenza !)

ii) La capacità  $C_{gs}$  non comparirà nell'espressione di  $G_{loop}(s)$ . Infatti T2 è un ottimo follower (non riusciremo mai a fare meglio di così, con un generatore di corrente al Source ed un carico infinito a valle!) per cui la tensione al Source segue perfettamente quella al Gate e quindi la tensione ai capi tra Gate e Source (dove c'è la capacità) non cambierà mai. La  $C_{gs}$  non dovrà quindi mai modificare la carica sui suoi piatti e pertanto sarà "invisibile" (Se volessi fare i conti formalmente scoprirei che  $C_{gs}$  introdurrebbe sia un polo che uno zero alla stessa frequenza !)

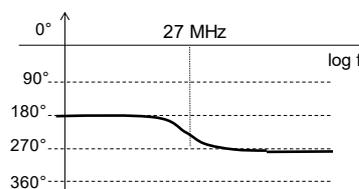
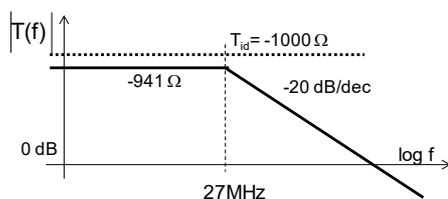
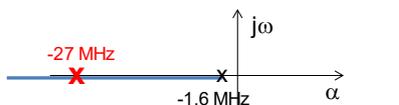
A questo punto rimane solo  $C_{gd}$ , che vede solo R3 ai suoi capi (attenzione a non aggiungere anche R2, in serie alla quale c'è una resistenza infinita data dai due collettori di T1 e T3 !).

Pertanto:

$$G_{loop}(s) = - \frac{R3}{R1 + 1/gm1} \frac{1}{(1 + sC_{gd}R3)} = -16 \frac{1}{(1 + sC_{gd}R3)}$$

dove  $1/2\pi C_{gd}R3=1.6\text{MHz}$ . Il luogo delle radici sarà come nella figura accanto.

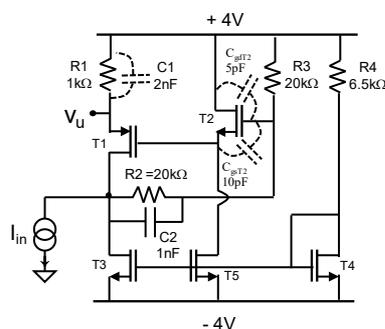
Il circuito retroazionato, con un solo polo nel guadagno di anello, avrà quindi il polo ad una frequenza  $f_p=(1-G_{loop})1.6\text{MHz}=27\text{MHz}$ . Il diagramma di Bode del trasferimento del circuito diventa perciò il seguente :



c) Il circuito da analizzare è ora quello accanto il cui trasferimento ideale (tutta la corrente  $I_{in}$  è fornita da T1 grazie al lavoro della retroazione) ha l'espressione :

$$T_{id}(s) = \frac{V_u}{I_{in}} = -R1 \frac{1}{(1 + sC_1 R_1)}$$

Il comportamento reale dipende dal guadagno d'anello che ora è cambiato rispetto a prima ed è diventato:



$$G_{loop}(s) = - \frac{R3}{R1 + 1/gm1} \frac{1}{(1 + sC_{gd}R3)} \frac{(1 + sC_1 R_1)}{(1 + sC_1 R_1 || 1/gm1)}$$

in cui al polo precedentemente trovato  $f_{p1}=1.6\text{MHz}$  si aggiunge un secondo polo a  $f_{p2}=400\text{kHz}$  ed uno zero  $f_z=80\text{kHz}$ .

Per disegnare il luogo delle radici si riscrive  $G_{loop}(s)$  nella forma compatta e comprensibile :

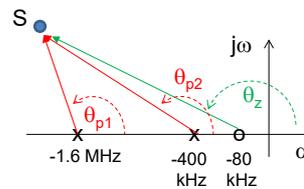
$$G_{loop}(s) = - 16 \frac{\tau_z}{\tau_{p1}\tau_{p2}} \frac{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_z}\right)\right)}{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p1}}\right)\right)\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p2}}\right)\right)}$$

L'equazione degli argomenti

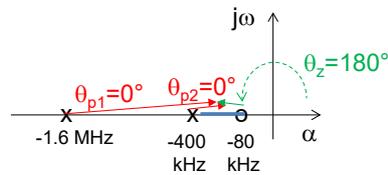
$$\arg\left(-16 \frac{\tau_z}{\tau_{p1}\tau_{p2}}\right) + \arg\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_z}\right)\right) - \arg\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p1}}\right)\right) - \arg\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p2}}\right)\right) = 0^\circ$$

ci dice che, preso un punto  $s$  qualsiasi nel piano di Gauss, gli angoli che i vettori che li collegano alle singolarità di  $G_{loop}$  formano con l'asse orizzontale devono sommarsi (zeri) e sottrarsi (poli) a dare  $180^\circ$ .

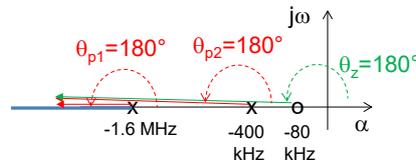
Con un po' di occhio e di pratica si scopre che i punti che soddisfano questa equazione sono :



i) quelli sull'asse orizzontale compresi tra  $f_{p2}$  e  $f_z$ ;

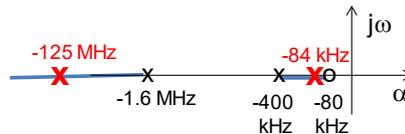


ii) quelli sull'asse orizzontale a sinistra di  $f_{p1}$ .

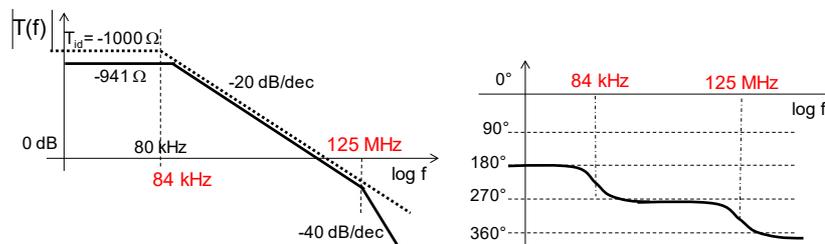


E' giusto che il luogo sia fatto da due rami perché il circuito dovrà avere due poli essendoci due capacità indipendenti.

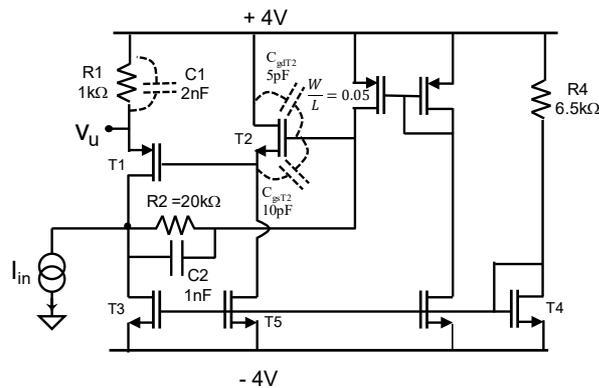
Tarando il luogo si trovano i due valori dei due poli del circuito retroazionato alle frequenze  $f_{p1}^* = 84 \text{ kHz}$  e  $f_{p2}^* = 125 \text{ MHz}$ :



i quali portano a tracciare il seguente diagramma reale (linea continua) ed ideale (tratteggiata) di Bode del trasferimento:

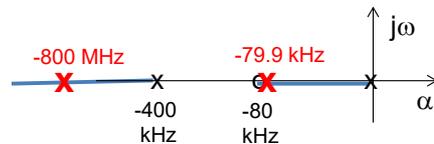


**E12.17** Considerare ora il circuito seguente, simile a quello visto nell'esercizio precedente eccetto che per lo specchio in alto (il cui MOSFET di sinistra ha  $W/L$  venti volte più piccolo di quello di destra).



Dopo esservi convinti che la polarizzazione dei due circuiti sia uguale,  
 a) Calcolare il guadagno ideale del nuovo circuito;  
 b) Calcolarne il trasferimento reale e disegnarne i nuovi diagrammi di Bode. Commentare il confronto con il risultato dell'esercizio precedente.

- a) Il trasferimento ideale è lo stesso di prima.
- b) La modifica circuitale comporta due effetti: i) il  $G_{loop}(0) = -\infty$  perché lo specchio ha sostituito la resistenza  $R3$  con una impedenza infinita; ii) il polo introdotto da  $C_{gd}$  ha ora una costante di tempo infinita e quindi si posiziona nell'origine del piano complesso quando tracciamo il luogo. Pertanto il nuovo luogo delle radici sarà il seguente:



e ci aspettiamo che il polo prevalente del circuito retroazionato sia molto vicino allo zero del luogo e che l'altro polo sia a frequenza molto alta. Per convincerci, prendiamo l'espressione di  $G_{loop}(s)$  dell'esercizio precedente in cui è ancora presente  $R3$ :

$$G_{loop}(s) = - \frac{R3}{R1 + 1/gm1} \frac{1}{(1 + sC_{gd}R3)} \frac{(1 + sC_1R1)}{(1 + sC_1R1||1/gm1)}$$

L'equazione per la ricerca dei poli è pertanto:

$$\begin{aligned}
& - \frac{R3}{R1 + 1/gm1} \frac{C_1 R1}{C_1 R1 \parallel \frac{1}{gm1}} \frac{1}{C_{gd} R3} \\
& = \frac{\left( s - \left( -1/C_1 R1 \parallel \frac{1}{gm1} \right) \right) \cdot \left( s - (-1/C_{gd} R3) \right)}{\left( s - (-1/C_1 R1) \right)}
\end{aligned}$$

Se pensiamo di fare tendere R3 all'infinito (notate che R3 si elide perché è presente sia nella costante di tempo del polo che nel guadagno di  $G_{loop}$ ), essa diventa :

$$- \frac{1}{R1 + 1/gm1} \frac{C_1 R1}{C_1 R1 \parallel \frac{1}{gm1}} \frac{1}{C_{gd}} = \frac{\left( s - \left( -1/C_1 R1 \parallel \frac{1}{gm1} \right) \right) \cdot (s - (0))}{\left( s - (-1/C_1 R1) \right)}$$

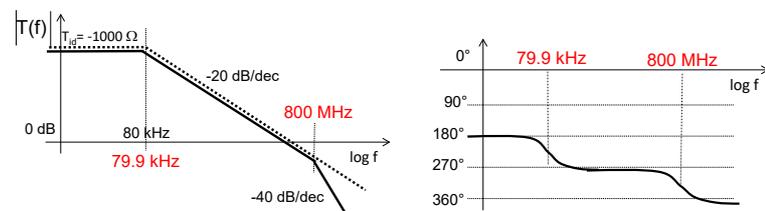
la cui soluzione dà i valori indicati nella figura.

Per avere una stima veloce del polo prevalente si potrebbe trascurare il polo veloce di  $G_{loop}$  (quello da 400kHz) e risolvere la più facile equazione :

$$- \frac{1}{R1 + 1/gm1} \frac{C_1 R1}{C_{gd}} = 320 = \frac{(s - (0))}{(s - (80kHz))}$$

che darebbe una stima di  $f_L = 79.7$  kHz.

Il corrispondente diagramma di Bode del circuito retroazionato sarebbe :



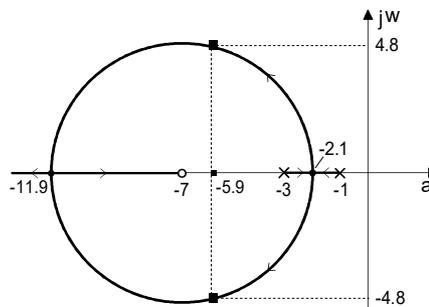
Pur essendo cambiato significativamente il luogo, il circuito viene sempre ad avere un polo prevalente molto vicino a quello calcolabile idealmente (80kHz). Nell'esercizio precedente era di poco maggiore (nel luogo vi arrivavo da sinistra) in questo un poco minore (nel luogo vi arrivo da destra).

**E12.18** Disegnare il luogo delle radici del circuito reazionato il cui guadagno di anello contiene uno zero:

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{(1 - s\tau_z)}{(1 - s\tau_{p1})(1 - s\tau_{p2})}$$

dove  $G_{loop}(0) = -18$ ,  $p_1 = -10 \text{Mrad/s}$ ,  $p_2 = -30 \text{Mrad/s}$  e  $z = -70 \text{Mrad/s}$ . Si determini inoltre la posizione dei poli ad anello chiuso.

Tutte le singolarità sono nel semipiano sinistro, quindi il parametro di taratura  $\gamma$  ha segno concorde con quello di  $G_{loop}(0)$ . I tratti di asse reale che appartengono al luogo sono quelli alla sinistra di un numero dispari di singolarità: in questo caso il segmento tra i due poli  $p_1$  e  $p_2$  ed il ramo a sinistra dello zero che si estende fino all'infinito. I due rami del luogo si staccano dall'asse reale ed invadono il piano di Gauss. Ci sono quindi dei valori di  $G_{loop}(0)$  in corrispondenza dei quali i poli del circuito retroazionato sono complessi coniugati determinando una risposta oscillante smorzata.



Per facilitare l'analisi del luogo, giova ricavare sia la posizione dei due punti di diramazione, in corrispondenza dei quali il luogo lascia l'asse reale, che il corrispondente valore di  $G_{loop}(0)$ . Per fare questo si può utilizzare l'equazione (8.12), oppure si utilizza direttamente l'equazione esplicita del luogo

$$\frac{|s - p_1| \cdot |s - p_2|}{|s - z|} = |\gamma| = |G_{loop}(0)| \cdot \frac{|p_1 p_2|}{z}$$

che può essere risolta lasciando  $|G_{loop}(0)|$  indicato, e ricercando i punti dei tratti di asse reale per cui l'equazione ha due radici coincidenti. È facile verificare che l'equazione diventa

$$-\frac{(s - p_1)(s - p_2)}{(s - z)} = -|G_{loop}(0)| \cdot \frac{p_1 p_2}{z}$$

Ovvero, si ottiene

$$s^2 - s \left[ p_1 + p_2 + |G_{loop}(0)| \cdot \frac{p_1 p_2}{z} \right] + p_1 p_2 (1 + |G_{loop}(0)|) = 0$$

Imponendo che le due soluzioni  $s_1$  e  $s_2$  siano reali e coincidenti, si ottiene

$$\left[ p_1 + p_2 + |G_{loop}(0)| \cdot \frac{p_1 p_2}{z} \right]^2 = 4[p_1 p_2 (1 + |G_{loop}(0)|)]$$

Esprimendo per esempio  $p_1$ ,  $p_2$  e  $z$  in unità  $|p_1|=1$ , come indicato nella figura, si ottiene l'equazione di secondo grado nell'incognita  $|G_{loop}(0)|$

$$|G_{loop}(0)|^2 - 46.7|G_{loop}(0)| + 21.8 = 0$$

che ha come radici i due valori di  $G_{loop}(0)$  (-0.47 e -46.2) per i quali i due poli del circuito reazionato sono reali e coincidenti. Il valore di questi poli è ora ottenuto risolvendo l'equazione del luogo con i valori di  $G_{loop}(0)$  appena determinati. Si trova  $s_1 = -2.1|p_1|$  e  $s_2 = -11.9|p_1|$ .

Essendo  $G_{loop}(0) = -18$ , il circuito in esame avrà due poli complessi coniugati. I loro valori, nelle unità di misura della figura, sono pari a

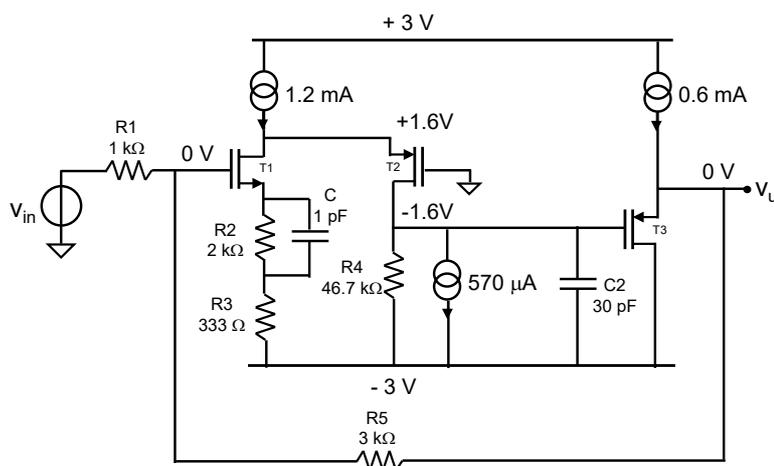
$$p_{1,2}^* = -5.9 \pm j4.8$$

Essi determinano risposte non monotone ma oscillanti alla frequenza di 7.6MHz e smorzate con costante di tempo pari a 17ns.

Il luogo si trova sempre all'interno della zona di piano limitata dalle bisettrici dei 4 quadranti, e quindi le sovraelongazioni del segnale di uscita non superano mai il 10% del valore asintotico, qualunque sia  $G_{loop}(0)$ . Si noti come per  $G_{loop}(0) = \infty$  i due poli tendano agli zeri, uno al finito e l'altro all'infinito. Inoltre la forma del luogo varia al variare della posizione dello zero. Quando lo zero è lontano dalla coppia di poli, il luogo invade molto il piano di Gauss con conseguenti problemi di sovraelongazione. Uno zero vicino al polo, invece, ne compensa l'effetto e rende il luogo sempre più simile a quello di un circuito con un solo polo.

**E12.19** Si consideri l'amplificatore della figura seguente, in cui i MOSFET abbiano  $V_T=0.6V$ ,  $k=\frac{1}{2}\mu_n C_{ox}W/L=600\mu A/V^2$  e  $V_A=\infty$ .

- Dati i valori di polarizzazione indicati nella figura, calcolare il guadagno ideale di tensione del circuito;
- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita a bassa frequenza dovuta al contributo della sola resistenza R5.
- Calcolare il guadagno di anello del circuito,  $G_{loop}(s)$  e tracciarne i relativi andamenti in frequenza del modulo e della fase in un diagramma quotato.
- Calcolare la banda passante del circuito retroazionato.
- Calcolare il valore RMS del rumore in uscita generato dalla resistenza R5



- La polarizzazione è tale da avere  $I_{T1}=0.6mA$ ,  $I_{T2}=0.6mA$ ;  $g_{m1}=1.2mA/V=g_{m2}=g_{m3}$   
Dando un gradino all'ingresso e girando lungo il circuito in senso orario, si scopre che la retroazione tende a contrastare lo spostamento del Gate di T1. In condizioni ideali quindi  $G = -R5/R1 = -3$
- Un generatore di corrente di rumore posto in parallelo a R5 stimola il circuito a reagire contrastando lo spostamento del Gate di T1. Pertanto tutta la corrente di rumore circolerà in R5 fornendo in uscita una densità spettrale di tensione pari a  $(7nV/\sqrt{Hz})^2$ .
- Percorrendo l'anello in senso orario partendo ad esempio dal Gate di T1 si ottiene :

$$G_{loop}(0) = -\frac{R4}{\frac{1}{gm1} + R2 + R3} \cdot \frac{R1}{\frac{1}{gm3} + R5 + R1} = -3$$

A cui si aggiunge il polo dovuto a C :

$$\tau_{p1} = C \cdot \left( R2 \parallel \left( R3 + \frac{1}{gm1} \right) \right) \quad f_{p1} = 216 \text{ MHz}$$

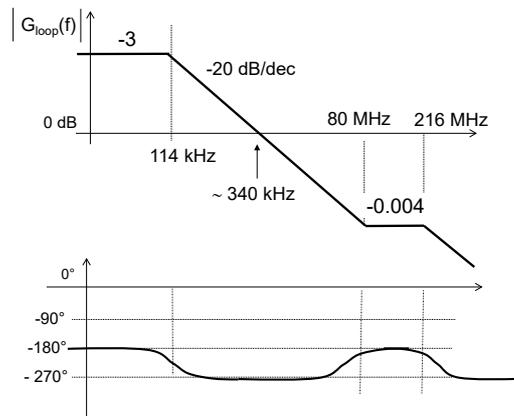
il polo dovuto a C2 :

$$\tau_{p2} = C2 \cdot R4 \quad f_{p1} = 114 \text{ kHz}$$

e lo zero dovuto a C :

$$\tau_z = C \cdot R2 \quad f_z = 80 \text{ MHz}$$

I diagrammi di Bode del Gloop(s) sono pertanto :



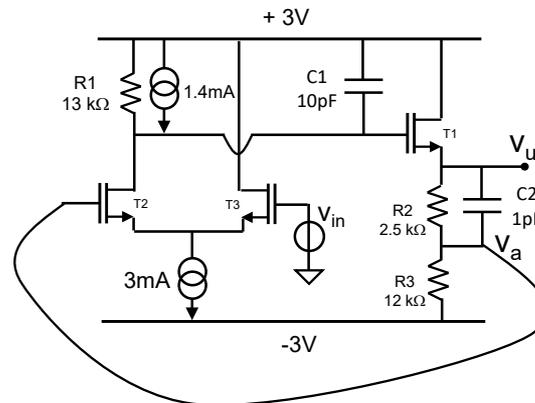
- d) Il diagramma di Bode di  $G_{loop}(s)$  appena trovato ci farebbe pensare che la banda passante del circuito possa essere stimata in circa 460 kHz (valore (1-Gloop) volte più veloce del circuito non retroazionato), guidati dalla considerazione che le altre singolarità siano così lontane in frequenza dal primo polo e che il valore di guadagno sia così piccolo che il comportamento generale del circuito non si discosti molto dal caso di un singolo polo alla frequenza di 114 kHz.

A conferma di ciò, si risolve comunque il luogo delle radici :

**E12.20**

Si analizzi il circuito seguente, i cui transistori abbiano  $V_T=0.4V$ ,  $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=400\mu A/V^2$  e  $V_A=\infty$ .

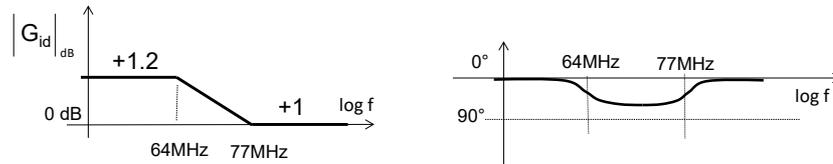
- Convincerli che il collegamento proposto tra  $V_a$  ed il Gate di T2 sia corretto per realizzare una retroazione negativa;
- Polarizzare il circuito e ricavare il valore in DC di  $V_u$ ;
- Calcolare il guadagno ideale del circuito,  $G_{id}(s)=v_u(s)/v_{in}(s)$  e disegnarne l'andamento in frequenza in un diagramma di Bode del modulo e della fase quotati;
- Determinare l'espressione del guadagno di anello del circuito,  $G_{loop}(s)$ , e disegnarne i diagrammi di Bode quotati in funzione della frequenza;
- Calcolare la frequenza dei poli del circuito aiutandosi con il luogo delle radici e disegnare i diagrammi di Bode del trasferimento reale.



- A fronte di un segnale  $v_{in}$  positivo, il Gate di T1 si alza ed analogamente si alza  $V_a$  e quindi  $V_{G|T2}$ . Questo contrasta l'iniziale aumento del comando di T3 e la corrispondente iniziale diminuzione del comando di T2. Pertanto la retroazione è effettivamente negativa.
- Ipotizzando che il differenziale sia bilanciato, si ottiene  $I_{T1}=250\mu A$ ,  $V_u\approx 0.6V$ ,  $V_{GS|T1}=1.1V$  che determina una corrente da R1 di  $100\mu A$  che conferma la correttezza dell'ipotesi iniziale. Otteniamo  $g_{mT1}=0.63mA/V$  ( $1/g_m=1580\Omega$ ),  $g_{mT2}=g_{mT3}=1.55mA/V$  ( $1/g_m=645\Omega$ ). Tutti i MOSFET sono correttamente in saturazione.
- Se il guadagno d'anello dell'amplificatore fosse infinito, il segnale erogato dal generatore forzante,  $v_{in}$ , sarebbe trasferito integralmente in  $V_{G|T2}$  e quindi ai capi di  $R_3$ . La corrente  $v_{in}/R_3$  scorrerebbe anche nel parallelo di  $R_2$  e  $C_2$  dando un trasferimento ideale dello stadio pari a :

$$G_{id}(s) = \frac{v_u(s)}{v_{in}(s)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \cdot \frac{1 + sC_2R_2 \parallel R_3}{1 + sC_2R_2}$$

Il circuito è quindi un esempio di circuito in cui una capacità (C2) già si manifesta nel guadagno ideale. In particolare, il trasferimento ideale a bassa frequenza sarebbe pari a 1.2 e quello ad alta frequenza a 1, con un polo a circa 64MHz ed uno zero a circa 77MHz.



Se lo stadio di andata non introducesse poli a frequenza minore di circa 100MHz, il risultato ottenuto mi farebbe presagire che nel guadagno reale del circuito ci sia un polo attorno ai 70MHz, non lontano cioè da quello ideale, a patto che il  $G_{loop}$  non sia troppo piccolo.

- (d) Si può pensare di partire a percorrere l'anello dal Drain del transistor di sinistra dello stadio differenziale con un segnale sonda di corrente. La presenza dei due condensatori  $C_1$  e  $C_2$ , indipendenti e non interagenti, fa sì che la funzione  $G_{loop}(s)$  abbia due poli.

Inoltre, in corrispondenza del valore complesso  $s = -1/R_2C_2$ , il guadagno d'anello ha anche uno zero perchè, per  $s = -1/R_2C_2$  l'impedenza della rete  $R_2 \parallel C_2$  diventa infinita e quindi T1 attiverrebbe corrente zero che ai capi di  $R_3$  darebbe tensione zero ed il segnale non riuscirebbe a continuare il percorso dell'anello per ritornare al punto da cui era partito. Perciò

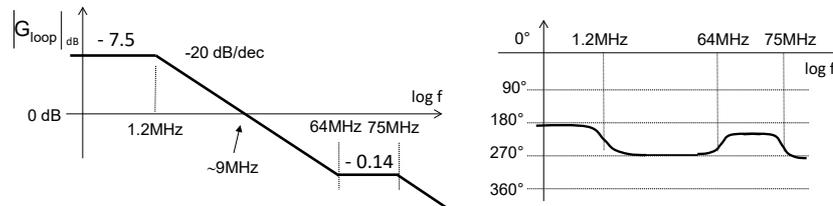
$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{1 + sR_2C_2}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

dove

$$G_{loop}(0) = -\frac{R_3R_1}{R_2 + R_3 + 1/g_{m1}} \cdot \frac{1}{2}g_{m2} \cong -7.5$$

$$f_{p1} = 1.2\text{MHz} \quad f_z = 64\text{MHz} \quad f_{p2} = 75\text{MHz}$$

i cui grafici sono i seguenti:

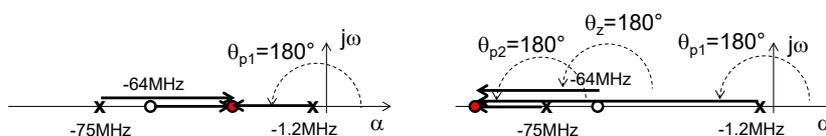


Noto in questo grafico che  $G_{loop}(s)$  attraversa l'asse a 0dB alla frequenza di circa 9MHz, oltre cui il circuito smette di essere retroazionato. Mi aspetto quindi che un polo del circuito reale sia attorno a quella frequenza, perché da lì in poi il guadagno si discosterà sensibilmente dal valore 1.2 trovato idealmente.

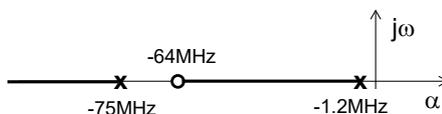
(e) Riporto i 3 punti nel piano complesso nel semipiano sinistro. Dovrà valere che :

$$\arg\left(G_{loop}(0) \frac{1}{\tau_{p1} \tau_{p2}} \frac{1}{\tau_z}\right) + \arg\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_z}\right)\right) - \arg\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p1}}\right)\right) - \arg\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p2}}\right)\right) = \arg(1)$$

$$180^\circ + \vartheta_z - \vartheta_{p1} - \vartheta_{p2} = 0^\circ$$



Fanno parte del luogo tutti i tratti di asse reale alla sinistra dei due poli di  $G_{loop}$ . Il luogo, disegnato sotto, è costituito da due rami (essendo due i poli) che si chiudono sugli zeri, uno al finito l'altro all'infinito. Ogni ramo conterrà un polo del circuito.



Giacché nessun ramo del luogo entra nel semipiano destro, il sistema è intrinsecamente stabile e la risposta ad una qualunque causa forzante è certamente monotona per qualunque valore di  $G_{loop}(0)$ . Per tarare il luogo si può procedere a determinare i punti del luogo per cui vale la condizione :

$$11.7 = \frac{\left|s - \left(-\frac{1}{\tau_1}\right)\right| \cdot \left|s - \left(-\frac{1}{\tau_2}\right)\right|}{\left|s - \left(-\frac{1}{\tau_z}\right)\right|}$$

Per risolvere l'equazione, oltre che analiticamente, si può procedere per tentativi. Ad esempio, partendo dagli indizi forniti dai punti precedenti, se  $S=-11\text{MHz}$  (scelto come se non ci fosse la coppia zero-polo ad alta frequenza, per cui  $S=1.2\text{MHz}(1-G_{loop}(0))$ ), l'equazione è ragionevolmente verificata:

$$11,7 = \frac{9.8 \cdot 64}{53}$$

Se diminuisco  $S=-10\text{MHz}$  si ottiene un risultato ancora più corretto e pertanto concludiamo che uno dei due poli del circuito stia a  $P1=10\text{MHz}$ .

In modo analogo si opera nell'altro ramo del luogo: se provassimo con un primo tentativo a  $S=-80\text{MHz}$ , come suggerito dal  $G_{id}$  (il polo dovrà necessariamente essere maggiore di  $75\text{MHz}$  perché il luogo inizia da lì) si otterrebbe :

$$11,7 \neq \frac{79 \cdot 5}{16}$$

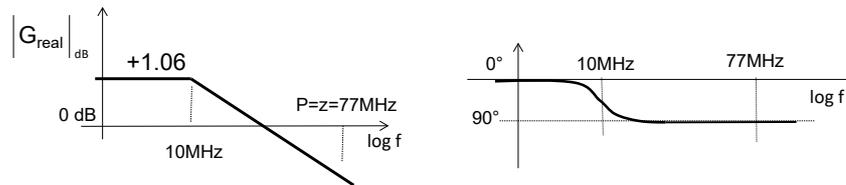
Come secondo tentativo provo  $S=77\text{MHz}$  che verrebbe molto più corretto. Pertanto i due poli del circuito retroazionato stanno circa a **P1=10MHz** ed a **P2=77MHz**.

Utilizzando la relazione :

$$G_{\text{real}} = G_{\text{id}} \cdot \frac{-G_{\text{loop}}}{1 - G_{\text{loop}}}$$

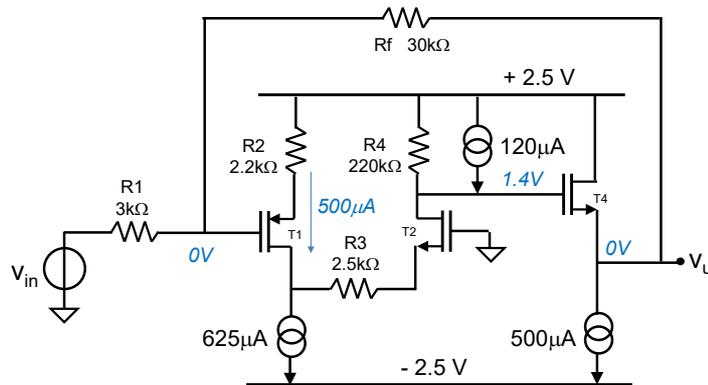
si vede che i) lo zero del  $G_{\text{id}}$  alla frequenza di  $f_z=77\text{MHz}$  viene ad elidersi con uno dei due poli del circuito retroazionato; ii) lo zero di  $G_{\text{loop}}(s)$  alla frequenza di  $64\text{MHz}$  si elide anch'esso con il polo di  $G_{\text{id}}$ .

Il diagramma del guadagno reale si discosta quindi da quello ideale a bassa frequenza ( $G_{\text{real}}(0)=1.06$ ) e manifesta nella pratica il solo polo alla frequenza di  $10\text{MHz}$  che non si vedeva nel guadagno ideale perché nascosto nello stadio di andata.



**E 12.21**

Si consideri il circuito retroazionato della figura seguente in cui i transistori abbiano  $V_T=0.4V$ ,  $k=1/2\mu_n C_{ox} W/L=500\mu A/V^2$  e  $V_A=\infty$ . Indicati in azzurro sono i valori della polarizzazione.



- Calcolare il guadagno di tensione del circuito nell'ipotesi di retroazione ideale.
- Calcolare il guadagno d'anello del circuito,  $G_{loop}(0)$ , a bassa frequenza e calcolare quindi il guadagno reale del circuito
- Calcolare il polo del circuito in presenza della sola capacità  $C_{gd}=1pF$  del transistore T1. Commentare il risultato trovato, risultato che forse non vi sareste aspettato di trovare.
- Per migliorare il comportamento del circuito preferireste cortocircuitare R2 o cortocircuitare R3 (in entrambi i casi immaginando che la polarizzazione rimanga invariata)? Perché?

- $G_{id}=-R_f/R1=-10$ .
- $G_{loop}(0)=-6$ ;  $G_{real}=-8.6$ . Notate che c'è anche un contributo di guadagno diretto, di piccolissima entità, pari a :

$$G_{dir} = \frac{\frac{1}{g_{m4}}}{R_1 + R_f + \frac{1}{g_{m4}}} \cdot \frac{1}{(1 - G_{loop}(0))} = 4 \cdot 10^{-3}$$

- Nel calcolare il guadagno di anello si incontra la capacità  $C_{gd|T1}$  che determina un polo ed uno zero destro :

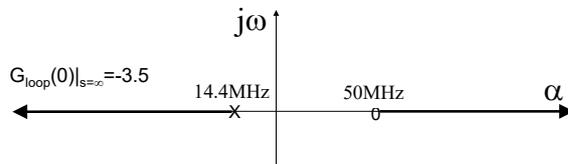
$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \frac{1 - s\tau_z}{1 + s\tau_p}$$

in cui :

$$\tau_z = C \cdot \left( \frac{1}{g_{m1}} + R_2 \right) = 3.2ns \quad (f_z=50MHz)$$

$$\tau_p = C \cdot \left[ R_1 \left\| \left( R_f + \frac{1}{g_{m4}} \right) \cdot \left( 1 + \frac{R_3 + \frac{1}{g_{m2}}}{R_2 + \frac{1}{g_{m1}}} \right) + R_3 + \frac{1}{g_{m2}} \right] = 11ns \quad (f_p=14MHz)$$

Il luogo delle radici è quindi il seguente:



Infatti si può riscrivere l'espressione di  $G_{loop}(s)$  come :

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \frac{(-\tau_z) (s - (1/\tau_z))}{(+\tau_p) (s - (-1/\tau_p))}$$

di cui fare l'argomento :

$$\arg \left( G_{loop}(0) \left(-\frac{\tau_z}{\tau_p}\right) \right) + \arg \left( s - \left(\frac{1}{\tau_z}\right) \right) - \arg \left( s - \left(-\frac{1}{\tau_p}\right) \right) = \arg(1)$$

Notando che il primo termine è l'argomento di un numero positivo (quindi  $0^\circ$ ), si ottiene il luogo prima disegnato.

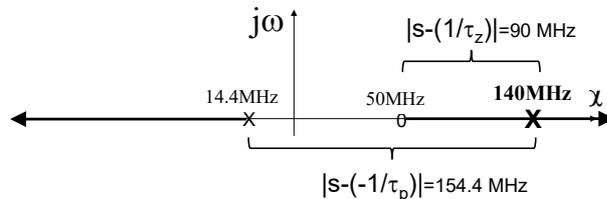
Il luogo ci mostra che potremmo essere instabili. Vediamo di trovare la posizione precisa del polo del circuito retroazionato. Esso stà sul luogo in posizione tale da soddisfare l'equazione dei moduli :

$$|G_{loop}(0)| \cdot \frac{\left| \frac{1}{\tau_p} \right|}{\left| \frac{1}{\tau_z} \right|} \cdot \frac{\left| s - \frac{1}{\tau_z} \right|}{\left| s - \left(-\frac{1}{\tau_p}\right) \right|} = 1$$

Notiamo subito che il punto del luogo all'infinito ( $s=\infty$ ) in corrispondenza del quale il circuito passa dall'essere stabile (estremo sinistro del semipiano sinistro) all'essere instabile (estremo destro del semipiano destro) lo si raggiungerebbe con :

$$|G_{loop}(0)| \cdot \frac{14.4MHz}{50MHz} = 1$$

cioè per  $G_{loop}(0)=-3.5$ . Avendo noi  $G_{loop}(0)=-6$  sappiamo di essere instabili ! Risolvendo l'equazione del modulo analiticamente oppure graficamente come nella figura (il rapporto tra le due distanze indicate in figura deve essere pari a 1.73 come dettata dall'equazione dei moduli), si trova  $f_{retr}=140MHz$  a destra del piano.



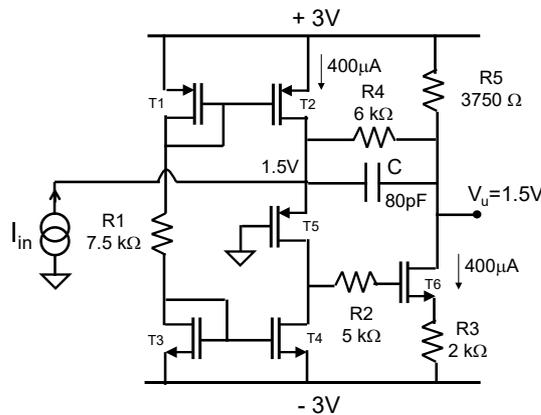
d) Per avere il circuito stabile, il polo deve posizionarsi a sinistra nel piano di Gauss. Dall'equazione del modulo si vede che è utile avere lo zero alla frequenza più alta possibile e il polo alla frequenza più bassa possibile. Cortocircuitare R2 va proprio in questa direzione (cortocircuitare R3 andrebbe nella direzione opposta perché lascerebbe lo zero invariato e velocizzerebbe il polo). Se  $R2=0$  si avrebbe  $G_{loop}(0)=-19$ ,  $1/\tau_p=8.2\text{MHz}$  e  $1/\tau_z=159\text{MHz}$ . Questa situazione determina un polo a frequenze elevatissime ma nel semipiano sinistro, e quindi stabile (per un pelo !).

## 12.5 RUMORE RMS IN UN CIRCUITO RETROAZIONATO

La conoscenza dei poli effettivamente presenti in un circuito retroazionato ci permette di calcolare l'entità del rumore all'uscita del circuito in termini di valore RMS delle fluttuazioni nel tempo (ciò che abbiamo chiamato nel Cap.8 come "la barba di rumore"). Per fare ciò in effetti dobbiamo semplicemente integrare la densità spettrale di rumore all'uscita sulla banda passante dell'effettivo trasferimento reale. Nell'esercizio E12.1 abbiamo fatto questo conto senza difficoltà nel caso di un circuito a singolo polo. I successivi esempi esploreranno eventuali aspetti non ovvi di questo tipo di calcolo.

**E12.22** *L'amplificatore a transresistenza disegnato sotto ha tutti i MOSFET con  $V_T=0.5V$ ,  $k=400\mu A/V^2$  e  $V_a=\infty$ .*

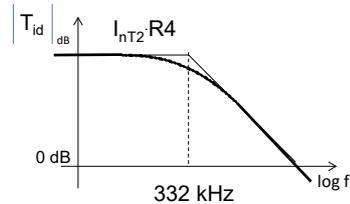
- Riprendere la polarizzazione del circuito, il suo trasferimento ideale e la sua reale banda passante dall'esercizio E12.1.*
- Confrontare la densità spettrale di rumore in uscita dovuta ai transistori dello specchio T2 e T4. Calcolare il valore RMS del loro rumore all'uscita.*
- Calcolare il valore RMS del rumore dovuto alla sola resistenza R5.*



- La polarizzazione è indicata in figura. Tutti i transistori mostrano una  $g_m=800\mu A/V$ . La corrente  $I_{in}$  verrà, in condizioni ideali, tutta richiamata attraverso  $R4||C$  e darà una funzione di trasferimento ideale pari a :

$$v_u(s) = -i_{in}(s) \frac{R_4}{1 + sR_4C}$$

con singolo polo a  $f=332kHz$ , come da grafico seguente:



- b) Il rumore di canale di T2, che senza retroazione si dividerebbe nei tre percorsi possibili (T2 -se avesse  $r_0$  finita-, T5 e  $R4 \parallel C+R5$ ), con la retroazione riprende la componente in T5 che attiva una corrente verso il basso in T6 che nel caso ideale richiama tutta la corrente di rumore attraverso  $R4 \parallel C$ . Il rumore di T2 segue perciò lo stesso percorso del segnale  $I_{in}$ , ed avrà quindi una funzione di trasferimento simile a quella trovata sopra, con il polo alla stessa frequenza :

$$S_u(s)|_{T2} = \frac{2}{3} \frac{4kT}{1/g_{mT2}} \left( \frac{R_4}{1 + sCR_4} \right)^2$$

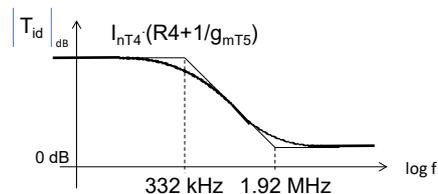
La funzione di trasferimento ci dice che il rumore alle alte frequenze viene sempre più attenuato contribuendo sempre meno al totale in uscita. Il corrispondente valore RMS diventa :

$$RMS|_{T2} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{4kT}{1/g_{mT2}} R_4^2 \frac{2\pi}{4} 332\text{kHz}} = 12.6\mu\text{V}$$

Consideriamo ora il rumore di canale di T4. Esso alza la tensione al Gate di T6 che attiva una corrente verso il basso in T6. Questa proviene da  $R4 \parallel C$  e da R5. La prima richiama la corrente di rumore verso l'alto da T5 attraverso  $1/g_{mT5}$  : la retroazione fa quindi in modo che la corrente di rumore di T4 venga assorbita da T5 e di conseguenza la densità spettrale di rumore in uscita sarà:

$$S_u(s)|_{T4} = \frac{2}{3} \frac{4kT}{1/g_{mT4}} \left( \frac{1}{g_{mT5}} + \frac{R_4}{1 + sCR_4} \right)^2$$

Con un andamento in frequenza come il seguente:



Il valore RMS sappiamo essere proporzionale all'area sottesa dalla curva. Rispetto a prima, oltre al polo definito dal luogo delle radici ed uguale al precedente (il  $G_{loop}(s)$  è sempre lo stesso !), c'è uno zero ad alta frequenza

che idealmente renderebbe il valore RMS infinito. Tuttavia sappiamo dal  $G_{loop}(s)$  che il circuito è retroazionato solo fino alla frequenza di 332kHz oltre cui il comportamento non è più come sopra idealizzato perché il circuito smette di essere retroazionato. Bisognerebbe quindi analizzare come si comporterebbe il circuito ad una sollecitazione di rumore applicata in T4 ad alta frequenza senza che la retroazione agisca. L'analisi capita bene che sta diventando sempre più complessa. Normalmente quindi si fa una stima del rumore RMS nella zona retroazionata (ipotizzando e sperando !? che il contributo fuori banda sia piccolo) e si lascia al calcolo del simulatore circuitale completo (che tenga ad esempio anche conto delle capacità interne dei transistori) l'aggiornamento al valore reale. Normalmente quest'ultimo non differisce significativamente dalla nostra stima iniziale, che nel caso di questo circuito è :

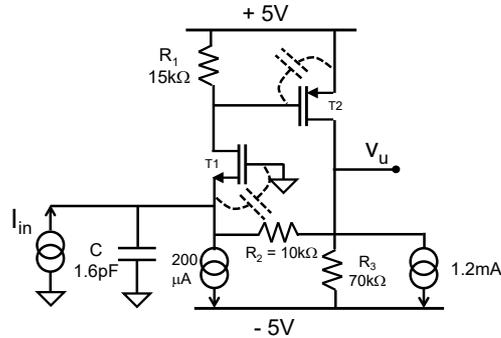
$$RMS|_{T4} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{4kT}{1/g_{mT2}} \left( \frac{1}{g_{mT5}} + R_4 \right)^2 \frac{2\pi}{4} 332\text{kHz}} = 15.3\mu\text{V}$$

Ci aspettiamo quindi che il rumore totale delle due sorgenti sia dell'ordine di 20 $\mu$ V RMS all'uscita.

- c) Fintanto che il circuito è ben retroazionato, il rumore RMS della resistenza R5 è nullo. A frequenze maggiori della banda del circuito la densità spettrale di rumore all'uscita aumenterà un po', ma si confida che ci sia un filtro passa-basso nel circuito che comunque limiti il trasferimento di queste frequenze inutili e nocive fino all'effettiva uscita del sistema.

**E12.23**

Considerare l'amplificatore della figura seguente, in cui i MOSFET abbiano  $V_T=0.5V$ ,  $k=1/2\mu C_{ox}W/L=200\mu A/V^2$ ,  $V_a=\infty$ . Si rimanda per la polarizzazione ed in generale per il suo comportamento su segnale al E.11.3. Considerare ora il caso in cui i due MOSFET abbiano  $C_{gs}=0.3pF$  ( $C_{gd}=0$ ) e che in parallelo al generatore di segnale  $I_{in}$  ci sia una capacità da  $C=1.6pF$ .



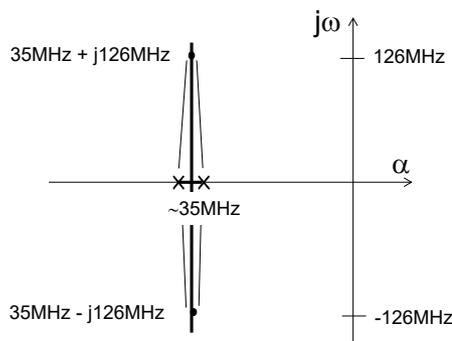
- Verificare che così facendo i due poli del  $G_{loop}(s)$  vengano praticamente a coincidere.
- Calcolare i poli del circuito retroazionato e disegnare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento.
- Calcolare il valore RMS del rumore in uscita dovuto alla sola resistenza  $R_2$ .

La polarizzazione del circuito fornisce  $g_{m1}=400\mu A/V$  ( $1/g_{m1}=2500\Omega$ ) e  $g_{m2}=1mA/V$ . Girando lungo l'anello in senso orario (si noti che in senso antiorario non sarebbe possibile scorrere) si ottiene un valore di  $G_{loop}(0)=-12.7$ . L'effettiva transresistenza del circuito sarà quindi pari a  $9270\Omega$  invece degli ideali  $10k\Omega$ .

- In effetti i due poli di  $G_{loop}(s)$  stanno a  $\tau_1=(1/g_{m1})\|(R_2+R_3)\cdot(C_{gs1}+C)=4.6ns$  e  $\tau_2=R_1\cdot C_{gs2}=4.5ns$ , praticamente coincidenti alla frequenza di  $35MHz$ .

- Il luogo delle radici è il seguente, ricavato risolvendo l'equazione :

$$G_{loop}(0) \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{\tau_2} \frac{1}{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_1}\right)\right) \left(s - \left(-\frac{1}{\tau_2}\right)\right)} = 1$$

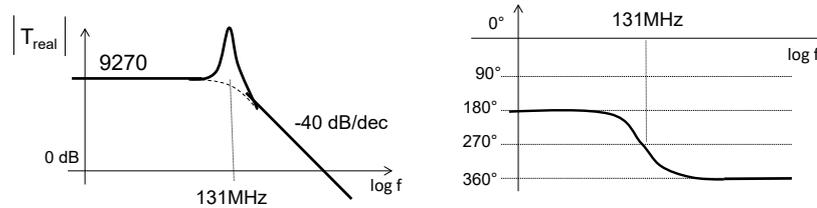


con i poli del circuito retroazionato alle frequenze

$$f_1 = 35\text{MHz} + j \cdot 126\text{MHz}$$

$$f_2 = 35\text{MHz} - j \cdot 126\text{MHz}$$

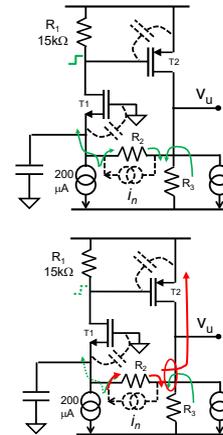
a cui corrisponde un diagramma di Bode come il seguente :



c) Mettendo in evidenza il generatore di corrente di rumore  $i_n$  in parallelo a  $R_2$ , si vede che fintanto che la retroazione non è attiva  $i_n$  scorre in tutti i percorsi possibili.

La frazione di corrente  $i_n$  che raggiunge  $R_1$  attiva  $T_2$ , e quindi la retroazione, con una corrente che viene prelevata non solo da  $R_3$  ma anche dal ramo di retroazione.

Idealmente quindi tutta  $i_n$  è forzata ad entrare in  $R_2$  a sinistra e ad essere prelevata da  $R_2$  a destra. Il trasferimento di  $i_n$  è pertanto identico a quello del segnale  $i_n$  e quindi vede la stessa funzione di trasferimento riportata sopra.



Per il calcolo del valore RMS si deve calcolare l'area sottesa dalla funzione di trasferimento. In alternativa al calcolo rigoroso dell'integrale della curva con i due poli complessi coniugati, è consigliabile arrivare velocemente ad una stima (di poco in eccesso!) svolgendo l'integrare come se ci fosse solo un polo (con quindi una pendenza di 20dB/dec invece degli attuali 40dB/dec), ottenendo il valore di stima seguente:

$$\text{RMS}|_{R_2} = \sqrt{\frac{4kT}{R_2} R_2^2 \frac{2\pi}{4} 131\text{MHz}} < 181\mu\text{V}$$

## 12.6 CONDIZIONI DI STABILITÀ

### 12.6.1 Stabilità e luogo delle radici

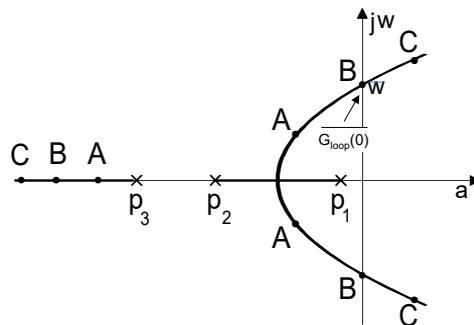
All'aumentare del guadagno d'anello, i **poli** di un circuito reazionato possono abbandonare l'asse reale negativo e diventare non solo complessi coniugati ma addirittura avere **parte reale positiva**. In quest'ultimo caso la **risposta** ad un gradino in ingresso sarebbe **oscillatoria crescente in ampiezza**, determinando l'immediata saturazione del segnale di uscita ai valori delle alimentazioni. Questa situazione è ovviamente da evitarsi<sup>2</sup> ed è importante sapere quando viene raggiunta.

Con riferimento ad esempio al luogo delle radici della Fig.12.11, l'instabilità del sistema è raggiunta quando il luogo attraversa l'asse immaginario (punto B) ed entra nel semipiano destro ( $\alpha$  positiva). Il valore limite di  $G_{loop}(0)$  per cui i poli raggiungono l'asse immaginario, che indichiamo con  $\overline{G_{loop}(0)}$  è ottenuto risolvendo l'equazione (ricavata dalla (12.15) nel caso di 3 poli) con  $s=0\pm j\overline{\omega}$

$$\left| G_{loop}(0) \cdot \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}\dots\tau_{zm}}{\tau_{p1}\tau_{p2}\dots\tau_{pn}} \right| \cdot \frac{1}{\left| j\overline{\omega} - \left( -\frac{1}{\tau_{p1}} \right) \right| \left| j\overline{\omega} - \left( -\frac{1}{\tau_{p2}} \right) \right| \left| j\overline{\omega} - \left( -\frac{1}{\tau_{p3}} \right) \right|} = 1 \quad (12.20a)$$

$$\arg[G_{loop}(j\overline{\omega})] = 0^\circ \pm k360^\circ \quad (12.20b)$$

Il sistema in esame è stabile o meno a seconda che l'effettivo valore di  $G_{loop}(0)$  sia maggiore o minore del valore limite  $\overline{G_{loop}(0)}$ .



**Fig. 12.11** Luogo delle radici di un circuito con 3 poli reali negativi in  $G_{loop}(s)$ .

<sup>2</sup> L'instaurarsi di oscillazioni in un circuito oltre a causarne il funzionamento improprio determina maggiore assorbimento di energia dalle alimentazioni e maggiore dissipazione termica dei componenti. Inoltre le oscillazioni possono essere trasmesse per accoppiamento elettromagnetico ad altre sezioni del circuito determinando malfunzionamenti anche in stadi di per sé perfettamente stabili.

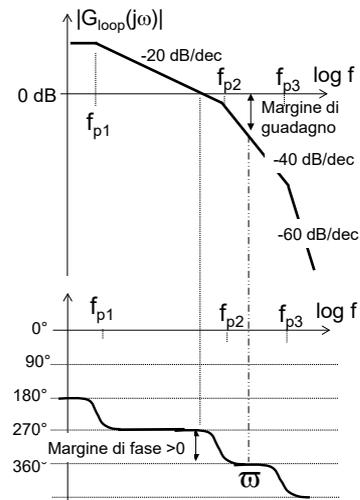
## 12.6.2 Il criterio di stabilità di Bode

Per valutare il grado di stabilità del sistema si possono anche analizzare congiuntamente i due diagrammi di Bode del modulo e della fase di  $G_{loop}(s)$ . Infatti le relazioni (12.20) consentono di enunciare in modo differente ma equivalente la condizione di stabilità:

*se esiste una pulsazione  $\bar{\omega}$  per cui il segnale, percorrendo completamente l'anello di reazione, subisce uno sfasamento di un multiplo intero di  $360^\circ$  allora il sistema è passibile di instabilità.*

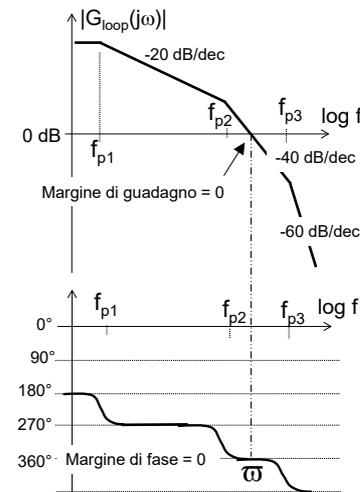
### Caso A di Fig.12.13

Se in corrispondenza della pulsazione  $\bar{\omega}$  che dà uno sfasamento di  $360^\circ$  il modulo del guadagno d'anello è inferiore a 1 ( $|G_{loop}(j\bar{\omega})| < 1$ ) allora l'oscillazione non riesce a sostenersi e si smorza. La figura accanto rappresenta questa situazione in cui lo sfasamento globale di  $360^\circ$  (deducibile dal grafico della fase) è ottenuto ad una frequenza a cui corrisponde un guadagno di anello in modulo inferiore a 1. Questo caso corrisponde ad avere i poli del sistema ad anello chiuso nel semipiano sinistro, come ad esempio nei punti A di Fig.12.13 (equivalente a dire che  $G_{loop}(0) < \overline{G_{loop}(0)}$ ).



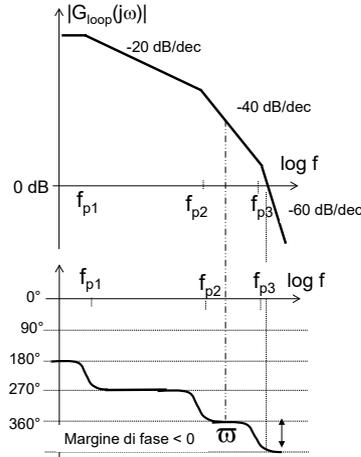
### Caso B di Fig.12.13

Se in corrispondenza della pulsazione  $\bar{\omega}$  che dà uno sfasamento di  $360^\circ$  il modulo del guadagno d'anello è pari a 1 ( $|G_{loop}(j\bar{\omega})| = 1$ ), allora viene sostenuta una oscillazione stazionaria. La figura accanto rappresenta questa situazione in cui lo sfasamento globale di  $360^\circ$  è ottenuto proprio alla frequenza a cui corrisponde  $|G_{loop}| = 1$ . Questo caso corrisponde ad avere una coppia di poli immaginari puri come nei punti B di Fig.12.13 (equivalente a dire che  $G_{loop}(0) = \overline{G_{loop}(0)}$ ).



**Caso C** di Fig.12.13

Se in corrispondenza della pulsazione  $\bar{\omega}$  che dà uno sfasamento di  $360^\circ$  il modulo del guadagno d'anello è maggiore di 1 ( $|G_{loop}(j\bar{\omega})| > 1$ ) allora l'oscillazione si alimenta. La figura accanto rappresenta questa situazione in cui lo sfasamento globale di  $360^\circ$  (deducibile dal grafico della fase) è ottenuto ad una frequenza a cui corrisponde un guadagno di anello in modulo superiore a 1. Questo implica la presenza di due poli complessi coniugati con parte reale positiva (sistema instabile) nella funzione di trasferimento del circuito retroazionato come nei punti C di Fig.12.13 e quindi il sistema diventa instabile (equivalente a dire che  $G_{loop}(0) > \overline{G_{loop}(0)}$ ).



Si noti come l'aumento di  $G_{loop}(0)$  nel passare dal caso A al caso C sposti la curva del modulo di  $G_{loop}(j\omega)$  sempre più in alto, aumentando **la pendenza con cui questa taglia l'asse a 0dB**.

Dalle considerazioni fatte sui diagrammi di Bode viene naturale definire le seguenti due quantità per esprimere il grado di stabilità del sistema reazionato:

- il **margin di guadagno**, pari al valore, espresso in dB, di  $|G_{loop}(j\bar{\omega})|$  alla pulsazione  $\bar{\omega}$  per cui la fase del guadagno d'anello è  $360^\circ$ . Per avere stabilità il margine di guadagno deve essere inferiore ad 1 (0dB). Esso equivale a calcolare di *quanto posso aumentare  $G_{loop}(0)$*  prima di arrivare a trovarmi nella condizione critica di avere  $G_{loop}(\bar{\omega})=1$ .
- il **margin di fase**, pari al valore di  $\arg[G_{loop}(j\omega_0)]$ , alla pulsazione  $\omega_0$  per cui  $|G_{loop}(j\omega)|$  attraversa l'asse a 0dB. Per garantire la stabilità il margine di fase deve essere maggiore di  $0^\circ$ . Esso ci dice quale *margin* di sicurezza si abbia prima che un ulteriore sfasamento dovuto a valori di capacità diversi nella realtà da quelli previsti in fase di progetto oppure dovuto a capacità non previste ci porti ad una situazione di instabilità.

E' facile verificare che :

- i) se il diagramma di Bode del modulo di  $G_{loop}(s)$  attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di **-20dB/dec**, qualunque sia il numero e la posizione di singolarità dopo l'intersezione, il margine di fase è sempre positivo e quindi il sistema è sempre **stabile**;

- ii) se l'attraversamento avviene con pendenza di  $-40\text{dB/dec}$  il sistema è detto **marginalmente stabile** perchè lo sfasamento lungo l'anello alla frequenza di intersezione è prossima a  $360^\circ$  e dipende criticamente dalla posizione e dal numero di poli a frequenza maggiore;
- iii) se invece l'attraversamento avviene con pendenza di  $-60\text{dB/dec}$  lo sfasamento è sicuramente superiore a  $360^\circ$  ed il circuito reazionato è sicuramente **instabile**.

Queste enunciazioni vengono talvolta indicate come **criterio di stabilità di Bode**.

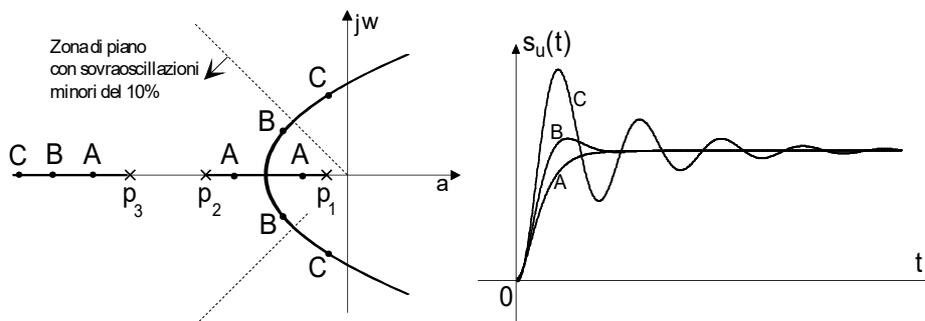
### 12.6.3 Come controllare le sovraoscillazioni in un sistema stabile

Se è vero che l'instabilità è da evitarsi assolutamente, anche una situazione stabile ma con risposta oscillante smorzata può essere indesiderata. Nella Fig.12.12 è riportata la risposta ad un gradino del sistema a 3 poli, normalizzata al valore asintotico, quando i poli ad anello chiuso sono sempre nel semipiano sinistro ma nelle tre posizioni (A), (B) e (C) indicate, tutte stabili.

Per limitare l'ampiezza della sovraoscillazione e per garantire che, nonostante le tolleranze dei componenti del circuito, la stabilità sia sempre verificata, si richiede in genere che un circuito *non solo sia stabile ma che il suo margine di fase sia maggiore di  $45^\circ$*  o in alternativa che i poli ad anello chiuso stiano nella regione del piano di Gauss compresa tra le due bisettrici dei quadranti. Ciò vuol dire che il *fattore di forma  $\xi$  della coppia di poli c.c.*

$$\xi = -\frac{\text{Re}[p]}{|p|}$$

non deve essere minore di  $1/\sqrt{2} = 0.7$ . Le sovraelongazioni massime prodotte da



**Fig. 12.12** Posizione nel piano complesso dei poli di un circuito reazionato a tre poli e corrispondente risposta al gradino.

una coppia di poli con fattore di forma pari a 0.7 sono infatti pari al 10% del valore asintotico.

Nel caso particolare di un sistema reazionato negativamente in cui il guadagno d'anello non abbia zeri nel semipiano destro ed abbia tre poli distanziati fra loro di almeno una decade, il margine di fase di  $45^\circ$  è raggiunto quando l'attraversamento del grafico del modulo di  $G_{loop}(f)$  con l'asse a 0dB avviene in corrispondenza del secondo polo. Infatti, in questo caso la fase del guadagno d'anello alla pulsazione di attraversamento dell'asse a 0dB è in pratica pari alla somma dei  $180^\circ$  dell'inversione, del contributo dovuto al polo a più bassa frequenza che è ormai di  $-90^\circ$  e del contributo del secondo polo che è  $-45^\circ$ .

Benchè richiedere un margine di fase minimo di  $45^\circ$  non corrisponda esattamente a richiedere che le coppie di poli abbiano un fattore di forma minore di  $1/\sqrt{2} = 0.7$ , tuttavia le differenze operative non sono molto grandi. Si tratta di due scelte conservative a cui è comunque bene riferirsi esplicitamente nel dimensionamento e nella valutazione del margine di stabilità del circuito per evitare confusioni.

#### 12.6.4 Differenze tra uso del diagramma di Bode e del luogo delle radici

L'analisi della stabilità di un circuito reazionato con il luogo delle radici è estremamente completa ed efficace. Il luogo infatti visualizza immediatamente la posizione dei poli del circuito reazionato e fornisce al progettista tutti gli elementi per eventualmente variarne la posizione per rendere il circuito stabile i) intervenendo sul valore di  $G_{loop}(0)$  o ii) modificando la posizione dei poli fisici di  $G_{loop}(s)$ . Dal luogo si può ricavare l'andamento nel tempo della risposta del circuito fornendo direttamente la frequenza dell'oscillazione (parte immaginaria dei poli) ed il suo smorzamento (parte reale dei poli). Il luogo permette di trattare facilmente anche circuiti aventi svariati poli e zeri e zeri nel semipiano destro.

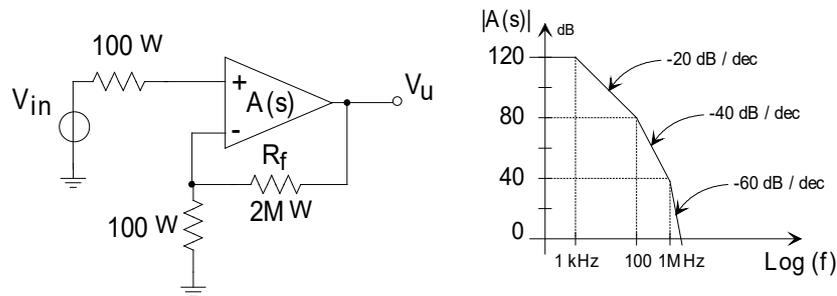
I diagrammi di Bode di  $G_{loop}(s)$  non forniscono direttamente tutto ciò. Purtroppo essi sono utili soprattutto quando si progettano circuiti con amplificatori operazionali. I diagrammi di Bode degli operazionali infatti, messi a disposizione del progettista dai costruttori, definiscono l'andamento con la frequenza dello stadio di andata del circuito e quindi, se la rete di reazione è puramente resistiva, anche del  $G_{loop}(s)$ . In questi casi il metodo grafico descritto nel precedente paragrafo ed i concetti di margine di guadagno e di fase forniscono gli elementi progettuali per decidere l'entità di  $G_{loop}(0)$  che garantisce la banda passante desiderata.

Ulteriori approfondimenti sul legame esistente tra luogo delle radici, diagramma di Bode, poli del circuito reazionato e risposta nel tempo sono discussi negli esempi che seguono.

**E12.24**

Si consideri l'amplificatore di tensione non invertente della figura seguente. Si supponga di realizzarlo con un operazionale avente il guadagno  $A(s)$ , fornito dal costruttore, riportato nella figura.

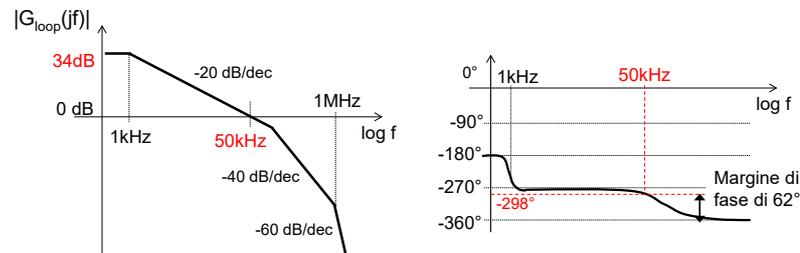
- Studiare la funzione di trasferimento, deducendone la stabilità in base ai valori del margine di guadagno e di fase;
- Dire come cambia la risposta quando si diminuisce il guadagno del circuito sostituendo la resistenza  $R_f$  con una da  $200k\Omega$  e poi da  $10k\Omega$ ;
- Commentare l'uso di questo operazionale come buffer.



(a) - Il guadagno ideale del circuito è di 20.000 (86dB). Poiché il ramo di reazione non aggiunge singolarità, l'andamento di  $G_{loop}(s)$  coincide con quello di  $A(s)$  in modo che

$$G_{loop}(0) = -10^6 \frac{100\Omega}{2M\Omega + 100\Omega} = -50 \text{ (34dB)}$$

come nei grafici seguenti

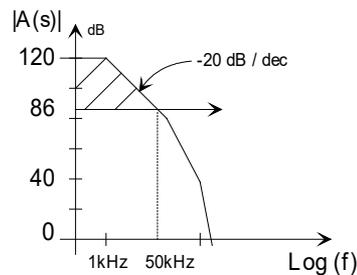


Il guadagno di anello taglia l'asse a 0dB alla frequenza di 50kHz con una pendenza di -20dB/dec. Per quanto visto, questo assicura che il circuito sia stabile. Lo sfasamento totale lungo l'anello alla frequenza di 50kHz è infatti solo di

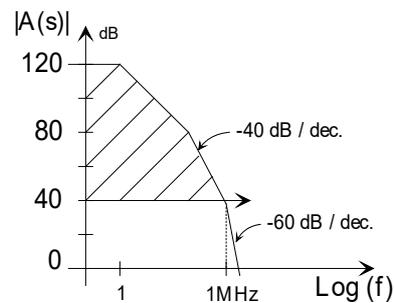
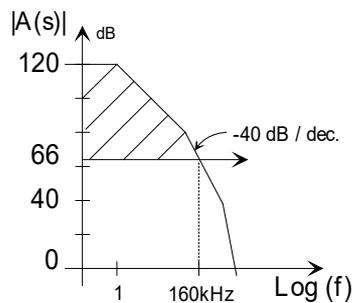
$$-180^\circ - \arctg\left(\frac{50\text{kHz}}{1\text{kHz}}\right) - \arctg\left(\frac{50\text{kHz}}{100\text{kHz}}\right) - \arctg\left(\frac{50\text{kHz}}{1\text{MHz}}\right) = -298^\circ$$

per cui il margine di fase è di  $62^\circ$ , confermando la stabilità.

Si noti che il grafico di  $G_{loop}(s)$  poteva essere velocemente visto in modo equivalente nel grafico di  $A(s)$  ponendo l'asse a 0dB alla quota di 86dB : sopra ho il  $G_{loop}(s)$ , sotto ho il  $G_{reale}$ .



(b) - Sostituendo  $R_f=2M\Omega$  con una resistenza da 200k $\Omega$  il guadagno ideale del circuito reazionato diminuisce a 200 (66dB) mentre  $G_{loop}(0)$  aumenta a 500 (54dB). Il grafico del guadagno di anello taglia l'asse a 0dB alla frequenza di circa 160kHz con una pendenza di -40dB/dec. Il margine di fase corrispondente è calcolabile in 23°. Esso indicherebbe stabilità pur con sovralongazioni considerevoli. Tuttavia, pensando alle tolleranze dei componenti operazionali fornite dai costruttori (mai inferiori al 20%) sia sul guadagno a bassa frequenza che sulla posizione dei poli, ci sono fondate probabilità che il circuito oscilli (circuito marginalmente stabile).

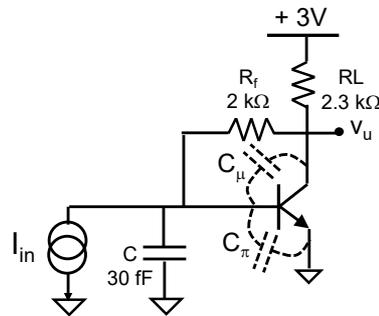


Naturalmente se si fa guadagnare il circuito ancora meno, come avviene scegliendo  $R_f=10k\Omega$ , il circuito satura immediatamente dopo l'accensione per via dell'innescò di una oscillazione crescente. Questo fatto è annunciato dal valore negativo del margine di fase (-39°) oltre che dall'attraversamento dell'asse a 0dB con una pendenza prossima ormai ai -60dB/dec.

(c) - E' evidente che la configurazione a buffer è assolutamente instabile.

**E12.25**

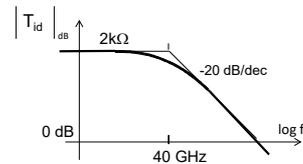
Si riprenda il ricevitore a transimpedenza dell'esercizio E12.8 non trascurando più le capacità del transistor ( $\beta=100$ ), che ora si suppone siano  $C_{\pi}=14fF$  e  $C_{\mu}=2fF$ .



- Discutere l'effetto della modifica sul guadagno ideale;
- Calcolare i nuovi poli del circuito e commentarne il comportamento in frequenza;
- tracciare il diagramma di Bode del guadagno d'anello e determinare il margine di fase ed il margine di guadagno.

(a) - La presenza delle capacità  $C_{\mu}$  e  $C_{\pi}$  non alterano ovviamente la polarizzazione del circuito ( $I_c=1mA$ ,  $1/g_m=25\Omega$ ) ma modificano il trasferimento ideale che diventa

$$G_{id}(s) = -\frac{R_f}{1 + sC_{\mu}R_f}$$



e mostra come il segnale di corrente dal fotodiode subisca una integrazione approssimata sulla capacità  $C_{\mu}$ .

(b) - La modifica introduce nel guadagno d'anello uno zero ed un ulteriore polo. La rete  $R_f C_{\mu}$  introduce uno zero nel guadagno d'anello perché in corrispondenza della pulsazione complessa  $\omega_z=1/R_f C_{\mu}$ , l'impedenza di questa rete diventa infinita e la trasformata di Laplace del segnale che percorre l'anello di reazione si annulla. La frequenza dello zero è  $f_z=40GHz$ . La presenza di due condensatori indipendenti determina due poli le cui costanti di tempo possono essere stimate utilizzando i metodi noti. La costante di tempo associata al polo più lento è pari circa a :

$$\tau_1 = C_{\pi} \cdot \frac{\beta}{g_m} \parallel (R_f + R_L) + C_{\mu} \cdot R_f \parallel \left( \frac{\beta}{g_m} + R_L \right) \cong 25ps$$

che corrisponde ad un primo polo a frequenza  $f_1=6.4GHz$ .

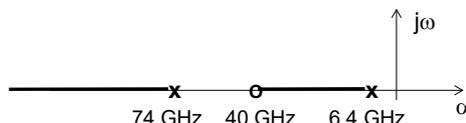
La seconda costante di tempo può essere stimata cortocircuitando  $C_{\pi}$  :

$$\tau_2 = C_{\mu} \parallel (R_f + R_L) = 2.1ps$$

che corrisponde ad un secondo polo a frequenza  $f_1=74\text{GHz}$ . Giacché le due stime sono più distanti di una decade, esse sono da considerarsi accurate. Quindi l'espressione del guadagno d'anello è

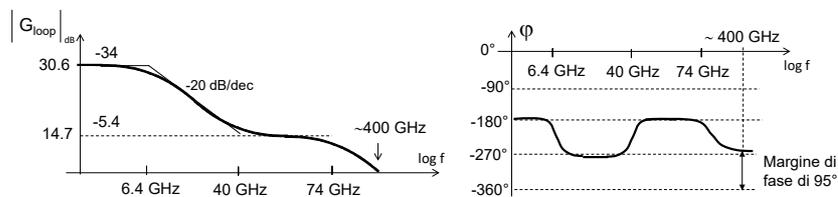
$$G_{\text{loop}}(s) = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1 + s\tau_z}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

dove  $G_{\text{loop}}(0)=-34$  è stato già ricavato nell'esercizio E 12.8. Il luogo delle radici è riportato nella figura seguente.



Il luogo resta sull'asse reale negativo, il sistema è incondizionatamente stabile e non presenta risposte sovraoscillanti a segnali di ingresso a gradino. All'aumentare del guadagno d'anello in continua, i poli a bassa frequenza tendono a muoversi verso gli zeri, uno al finito e l'altro all'infinito. Il valore di  $G_{\text{loop}}(0)=-34$  è sufficiente perché il primo polo ormai raggiunga lo zero del guadagno d'anello a circa **38GHz**. Anche il secondo polo si sposta verso frequenze più alte ed in questo caso la taratura del luogo fornisce il valore di circa **450GHz**.

(c) - Il diagramma di Bode del guadagno d'anello è il seguente



Si noti come il guadagno d'anello si avvicini, per frequenze superiori a 40GHz, ad un valore costante pari a  $G_{\text{loop}}(0)\tau_z/\tau_1 = -5.4$ . Quindi, dopo l'ultimo polo, il diagramma di Bode attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di circa -20dB/decade in corrispondenza della frequenza di circa 400GHz ed il sistema si comporta sostanzialmente come un circuito a singolo polo. Il margine di fase è pari a :

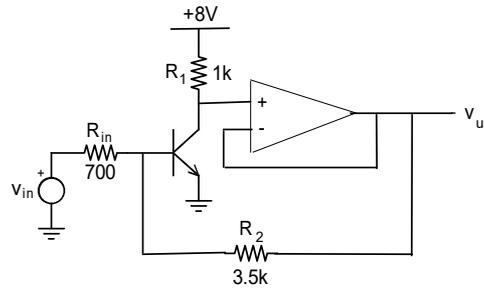
$$\Delta\varphi = 180^\circ - \arctg\left(\frac{400\text{GHz}}{6.4\text{GHz}}\right) + \arctg\left(\frac{400\text{GHz}}{40\text{GHz}}\right) - \arctg\left(\frac{400\text{GHz}}{74\text{GHz}}\right) = 95^\circ$$

**E12.26**

Si consideri il seguente circuito in cui il transistor bipolare abbia  $f_T=1\text{GHz}$ ,  $\beta=300$  e  $C_\mu=2\text{pF}$ , ed in cui lo stadio operazionale abbia un singolo polo e  $\text{GBWP}=200\text{MHz}$ .

(a) Calcolare i poli del circuito reazionato.

(b) Per quale valore di guadagno di anello oscillerebbe?



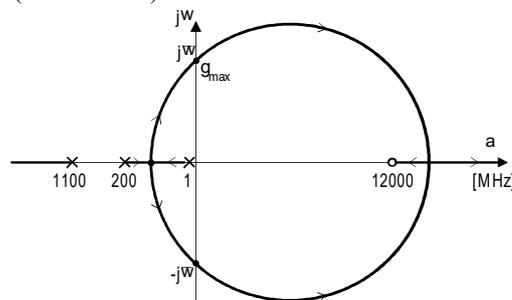
In assenza di segnale applicato, l'uscita si porta a  $V_u=+4.2\text{V}$  e nel BJT scorre  $I_C=3.8\text{mA}$ . Il circuito ha un guadagno ideale  $G_{id}=-5$ . Il guadagno di anello presenta le singolarità proprie del BJT (due poli con parte reale negativa ed uno zero reale positivo) ed il polo del disaccoppiatore ad operazionale alla frequenza di  $200\text{MHz}$ . Le singolarità citate sono

$$\tau_z = C_\mu \frac{1}{g_m} = 13 \text{ ps} \quad (f_z = 12 \text{ GHz}) \quad \tau_{\text{OP.AMP}} = 0.8 \text{ ns} \quad (f_{p2} = 200 \text{ MHz})$$

$$\tau_L = \left[ R_{in} \parallel R_2 \parallel \frac{\beta}{g} \right] \cdot \left[ C_\pi + C_\mu (1 - g_m R_1) \right] + C_\mu R_1 = 151 \text{ ns} \quad (f_{p1} = 1 \text{ MHz})$$

$$\tau_H = \left[ R_{in} \parallel R_2 \parallel \frac{\beta}{g} \right] \cdot C_\pi C_\mu R_1 / \tau_L = 0.1 \text{ ns} \quad (f_{p3} = 1.1 \text{ GHz})$$

Il luogo è quindi (non in scala)



## 2.7 STABILITÀ E TECNICHE DI COMPENSAZIONE

Può succedere che un amplificatore  $A(s)$  usato come stadio di andata di un circuito reazionato stabile, dia luogo ad un circuito reazionato instabile se collegato ad una diversa rete di reazione. Infatti quest'ultima può modificare  $G_{loop}(s)$  al punto che il margine di stabilità potrebbe rivelarsi insoddisfacente.

Sia che si progetti un circuito nuovo sia che si usi un circuito preesistente, è quindi consueto essere chiamati ad intervenire sulle singolarità di  $G_{loop}(s)$  al fine di rendere il circuito più stabile. Vediamo come nei paragrafi seguenti.

### 12.7.1 Stabilizzazione in frequenza con modifica dei poli

Si supponga di avere un circuito il cui guadagno di anello ed il cui luogo delle radici abbiano gli andamenti della Fig.12.13a. Il circuito ha una coppia di poli complessi e coniugati (c.c.) come ben visibile dal luogo delle radici che ne individua chiaramente i valori, preannunciandoci una risposta oscillante ad un gradino in ingresso. I diagrammi di Bode di  $G_{loop}(f)$ , pur meno precisi quantitativamente, ci preannunciano anch'essi una situazione instabile perchè il modulo attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di -40dB/dec.

Per portare il circuito in condizioni di maggior stabilità si può **intervenire sulle singolarità già esistenti** nei modi seguenti.

*Velocizzazione del polo veloce.* La stabilità sarebbe migliorata se si portasse il polo più veloce di  $G_{loop}(s)$ ,  $p_2$ , ad una frequenza ancora più elevata. Se ad esempio il polo di  $G_{loop}$  fosse spostato nella posizione della Fig.12.13b il circuito diventerebbe sicuramente più stabile, come evidente sia guardando il margine di fase/guadagno nei diagrammi di Bode sia guardando il luogo delle radici che ora si è esteso e quindi, a parità di  $G_{loop}(0)$ , lo si scorre arrivando a posizionare i poli del circuito retroazionato entro il cono di piano a 45° se non addirittura sull'asse reale.

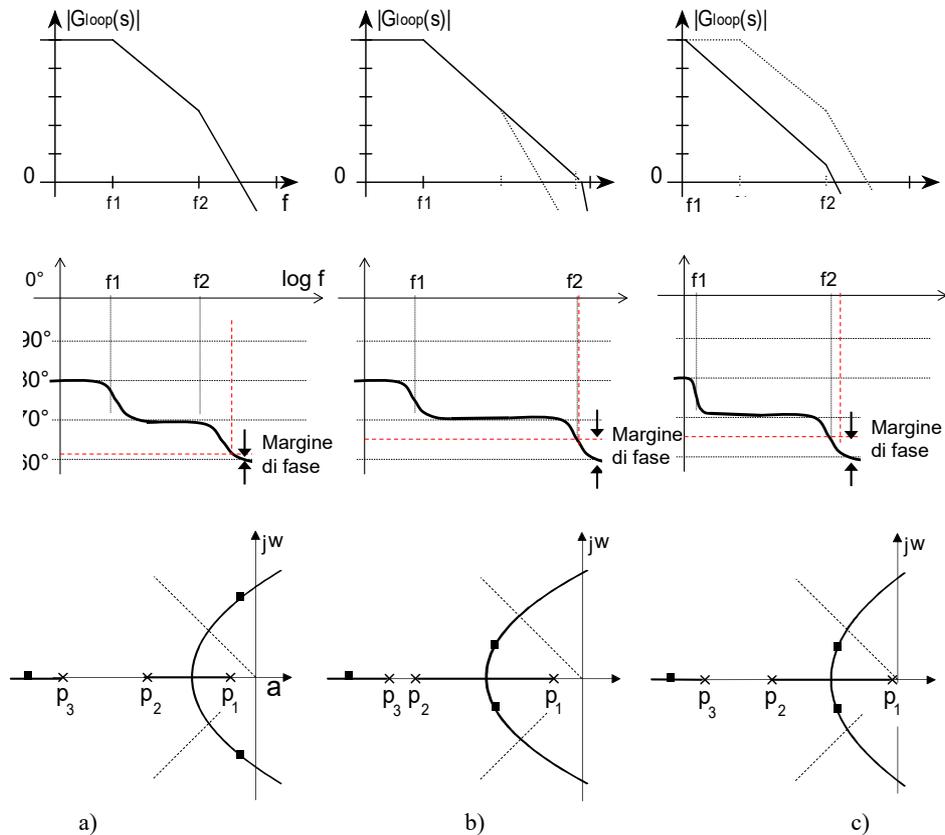
L'operazione di rendere un polo più veloce di quanto già non sia stato fatto in fase iniziale di progetto è però spesso difficile. Infatti significa ridurre la resistenza che partecipa al polo, con ciò spesso diminuendo contemporaneamente il guadagno in continua (effetto non sempre accettabile), o ridurre la capacità, spesso già definita quasi unicamente dagli elementi parassiti dei transistori e quindi con pochissimi margini di miglioramento. In un progetto circuitale già inizialmente ben fatto, un intervento di revisione riesce a spostare il polo più veloce di piccoli fattori (2 o 3 se si è molto bravi) rispetto a fattori ben maggiori necessari per recuperare una stabilità sicura.

*Rallentamento del polo dominante.* Se il  $G_{loop}(s)$  della Fig.12.13a è già il meglio che si riesce ad ottenere dopo avere spinto alla frequenza più alta possibile il suo secondo polo, ciò che possiamo fare per rendere più stabile il circuito è ridurre la

frequenza del primo polo  $p_1$ . Se ad esempio l'arretramento è tale da far attraversare l'asse a 0dB di  $G_{loop}(f)$  vicino alla posizione del secondo polo (come mostrato nel diagramma di Bode della Fig.12.13c) si riottiene un margine di fase di sufficiente sicurezza. Guardando il luogo delle radici questa mossa ha esteso il luogo e pertanto a pari  $G_{loop}(0)$  verrà scorso meno arrivando a posizionare i poli del circuito retroazionato entro il cono di piano a  $45^\circ$  se non addirittura sull'asse reale.

Questa compensazione in frequenza, agendo sul polo dominante e diminuendone ulteriormente la frequenza, è molto più facile da realizzare perchè richiede solo **l'aggiunta** di una capacità nel nodo che già prima ne determinava il polo.

In molti amplificatori operazionali in commercio questo intervento viene realizzato fin dalla fase di progetto del circuito integrato. Per generare un adeguato valore viene introdotta una capacità di compensazione di qualche pF tra



**Fig. 12.13** Effetto della modifica dei poli sulla stabilità di un circuito reazionato: (a) situazione di partenza di circuito instabile, (b) velocizzazione di un polo veloce, (c) rallentamento del polo dominante.

Gate e Drain di uno stadio Source comune : questa capacità, amplificata per effetto Miller, determina il polo prevalente dell'amplificatore integrato, raggiungendo frequenze anche di qualche decina di Hz.

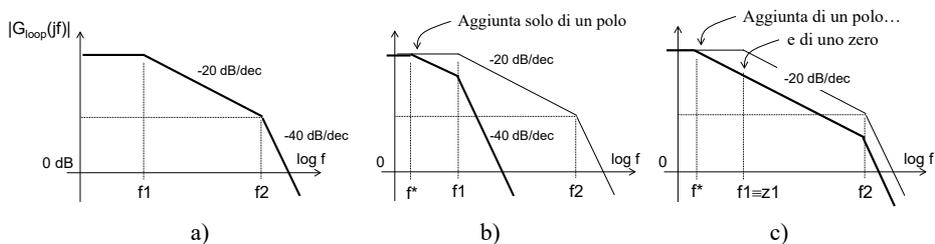
Gli amplificatori operazionali che adottano questa soluzione ed in cui il loro secondo polo nella  $A(s)$  interviene ad una frequenza per cui il guadagno di tensione sia ormai già inferiore a 0dB, sono detti *incondizionatamente stabili* o perfettamente *compensati* perchè qualunque rete di reazione si utilizzi, anche ad esempio il collegamento diretto a buffer e purchè non aggiunga essa stessa poli a bassa frequenza, il circuito è sempre stabile. Il prezzo pagato per ottenere stabilità arretrando il polo dominante è evidentemente la riduzione della banda del circuito.

Per dare la possibilità al progettista di ottimizzare i requisiti di banda e di stabilità, ci sono in commercio degli amplificatori operazionali non compensati che consentono di intervenire all'occorrenza sul valore della capacità di compensazione. In pratica l'integrato ha due piedini fra cui si può inserire una capacità esterna che si pone in parallelo alla capacità di compensazione interna, in modo da ridurre chirurgicamente la frequenza del primo polo al valore desiderato. Questi OpAmp vengono usati in configurazioni operazionali con guadagno alto e, in questi casi, consentono di realizzare degli stadi con banda più larga di quanto ottenibile con OpAmp compensati. Se però l'amplificazione richiesta diminuisce (ovvero l'entità della reazione aumenta), il vantaggio connesso al loro impiego rispetto all'uso di OpAmp compensati diminuisce perché si dovrebbe inserire una capacità esterna elevata per evitare che abbiano margine di fase insufficiente così riducendo progressivamente la banda ad anello chiuso.

**E12.25** Si consideri la configurazione operativa non invertente studiata negli esercizi E12.5 ed E12.18. Nell'esercizio E12.5 si è utilizzato un operazionale perfettamente compensato con guadagno in continua 120dB e GBWP di 10MHz mentre nell'esercizio E12.18 si è utilizzato un amplificatore non compensato. Se si dovesse realizzare un circuito reazionato che guadagni 20.000, entrambi i circuiti sarebbero stabili. Nel primo caso si sceglierebbe  $R1=100\Omega$  ed  $R2=2M\Omega$ , ottenendo  $G_{loop}(0)=50$  ed una banda ad anello chiuso di 500Hz. Se si utilizzasse invece l'amplificatore non compensato dell'esercizio E12.18 la banda ad anello chiuso sarebbe ben maggiore e pari a 50kHz. Se però si dovesse realizzare una configurazione con guadagno di tensione 200, mentre nel primo caso non ci sarebbero problemi di stabilità, nel secondo caso non si avrebbe margine di fase sufficiente. Per recuperare un margine di fase di  $45^\circ$  si dovrebbe spostare il primo polo dello stadio a 200Hz, in modo che l'asse a 0dB sia attraversato in corrispondenza della frequenza del secondo polo, riducendo la banda.

### 12.7.2 Stabilizzazione in frequenza con reti sfasatrici

Se non si ha modo di intervenire sulle singolarità già esistenti nell'anello modificandone i valori come visto nel paragrafo precedente si può pensare di aggiungere nell'anello una opportuna rete che introduca una coppia polo-zero. Si pensi ad esempio di avere un circuito il cui guadagno di anello abbia di nuovo l'andamento della Fig.12.13a, riportato per comodità nella Fig.12.14a. Se si introducesse solo un polo ad esempio alla frequenza  $f^*$  magari uguale a quella che risolveva il problema nel caso della Fig.12.13c, la stabilità addirittura

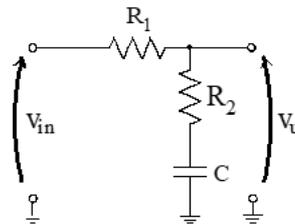


**Fig. 12.14** Compensazione in frequenza di un circuito reazionato con l'aggiunta di una rete che introduce sia un polo che uno zero: (a) situazione iniziale di circuito instabile, (b) aggiunta di un solo polo alla frequenza  $f^*$ , (c) aggiunta anche di uno zero alla frequenza  $f1$  con una rete compensatrice polo-zero.

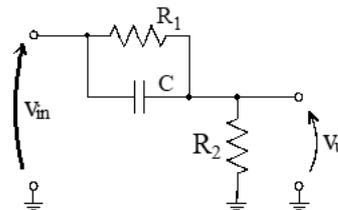
peggiorebbe: ora infatti l'andamento complessivo sarebbe quello della Fig.12.14b in cui il nuovo polo lento andrebbe ad aggiungersi ai precedenti riducendo anche la banda del circuito.

La soluzione è invece quella di introdurre, insieme al polo alla frequenza  $f^*$ , anche uno zero di valore esattamente pari al vecchio polo  $p_1$  in modo da annullarne l'effetto ed estendere la banda almeno fino alla frequenza  $f_2$  (Fig.12.14c). Queste reti si dicono generalmente **reti sfasatrici** poichè introducono un sfasamento addizionale nell'anello, dipendente dalla differenza tra la frequenza del polo e quella dello zero.

Se la frequenza del polo è minore di quella dello zero, le frequenze più basse subiscono un ritardo di fase che poi diminuisce all'aumentare della frequenza per la presenza dello zero. Questo è il caso della rete della figura accanto e si parla di *rete posticipatrice*.



Se lo zero interviene prima del polo, come con la rete mostrata accanto, lo sfasamento introdotto a bassa frequenza è in anticipo e diminuisce, per la presenza del polo, all'aumentare della frequenza. In questo caso si parla di *rete anticipatrice*.



## 12.8 EFFETTO SULLA STABILITÀ DI CARICHI CAPACITIVI

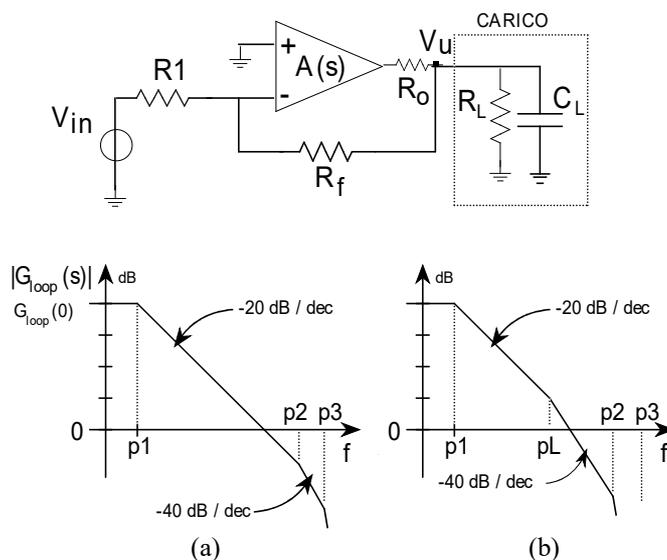
Un circuito reazionato progettato stabile può diventare instabile quando lo si usa per comandare un carico a forte componente capacitiva o quando viene pilotato da uno stadio a forte componente capacitiva. Questi carichi all'ingresso e/o all'uscita alterano la funzione  $G_{loop}(s)$  spostando poli già presenti o eventualmente aggiungendone di nuovi. Illustriamo la problematica con alcuni esempi.

### 12.8.1 Effetto di un carico capacitivo in uscita

Supponiamo di avere progettato un circuito reazionato stabile con un margine di fase di almeno  $45^\circ$ , il cui guadagno di anello abbia l'andamento mostrato nella Fig.12.15a. Per semplicità i 3 poli presenti nell'anello ( $p_1, p_2, p_3$ ) siano immaginati dovuti agli elementi reattivi del circuito di andata. L'aggiunta di un carico con capacità  $C_L$  determina, con la resistenza di uscita dello stadio, un polo nel guadagno di anello alla frequenza

$$f_L = \frac{1}{2\pi C_L [R_0 \parallel R_L \parallel (R_f + R_1)]} \cong \frac{1}{2\pi C_L R_0}$$

che supponiamo vada ad aggiungersi ai precedenti. Fintanto che  $f_L$  è più alta di



**Fig. 12.15** Effetto di un carico capacitivo sulla stabilità di un circuito reazionato: (a) comportamento del guadagno di anello del circuito senza carico; (b) effetto di un carico che introduca un polo ad una frequenza  $f_L < f_2$ .

quella di  $p_2$  non ci sono effetti sostanziali sulla stabilità del circuito. Quando invece  $C_L$  è tale da portare  $f_L$  a frequenze minori di  $p_2$ , allora l'andamento in frequenza di  $G_{loop}(s)$  ne risente anche nell'intervallo di frequenze in cui  $|G_{loop}(j\omega)| > 1$ , riducendo il margine di fase o addirittura innescando l'instabilità quando ad esempio si attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di -40dB/dec, come nella Fig.12.15b. Se nulla si può fare per ridurre la capacità del carico, bisogna allora intervenire sulla resistenza  $R_0$  riducendola il più possibile, magari inserendo a valle dell'amplificatore un follower con una resistenza di uscita minore.

Un altro intervento che riduce l'effetto sulla stabilità della capacità di carico è quello di aggiungere una piccola resistenza  $R_s$  in serie tra il circuito ed il carico, come mostrato nella Fig.12.16. Essa "isola" il carico dall'anello e rende quest'ultimo meno influenzato da  $C_L$ . Spesso sono sufficienti valori di resistenza di poche centinaia di Ohm. Naturalmente questo intervento attua una partizione tra l'amplificatore ed il carico per cui il guadagno di tensione tra il generatore sorgente ed il carico viene diminuito e la sua banda complessiva ridotta.

### 12.8.2 Effetto di un carico capacitivo in ingresso

Considerazioni analoghe alle precedenti valgono quando si hanno carichi capacitivi in ingresso. Si prenda ad esempio il circuito passa alto della Fig.12.17a e si ponga attenzione alla capacità  $C_x$  esistente tra i morsetti dell'operazionale, eventualmente involontariamente aumentata per poca cura nel montaggio. Apparentemente la presenza della capacità  $C_x$  non è di alcun rilievo perchè essa è connessa ad un nodo di terra virtuale e quindi non interviene nel trasferimento ideale. La sua presenza ha invece effetto sulla stabilità del circuito perchè la combinazione delle resistenze  $R_f$  ed  $R_1$  con  $C_i$  e  $C_x$  determina un polo aggiuntivo  $f_L$  nel  $G_{loop}(s)$ . Esso non dà effetti significativi fintanto che  $f_L > f_2$  (nel caso di circuito con  $G_{loop}(s)$  come quello della Fig.12.15a), mentre può introdurre instabilità quando  $f_L < f_2$ .

Un modo per risolvere il problema è di compensare l'effetto di  $C_i$  e  $C_x$  aggiungendo

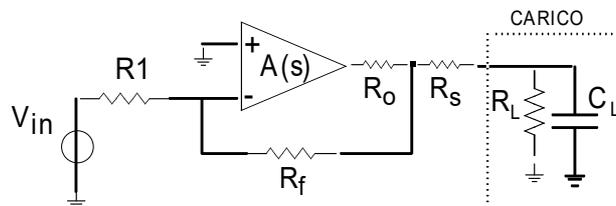
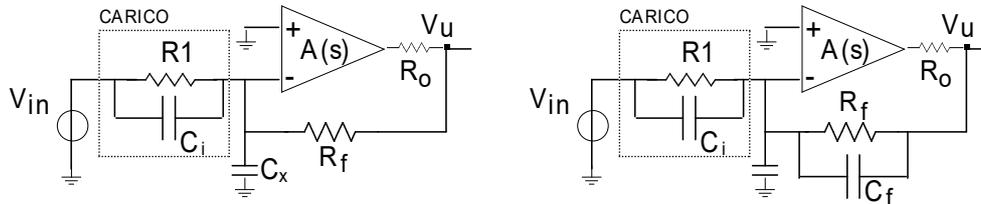


Fig. 12.16 Introduzione della resistenza  $R_s$  per ridurre la "visibilità" del carico da parte dell'anello di reazione del circuito.



**Fig. 12.17** Esempio di un carico di ingresso con componente capacitiva (a) e possibile intervento circuitale per ridurre gli effetti sulla stabilità del circuito reazionato (b).

una capacità  $C_f$  in parallelo a  $R_f$  di valore tale che  $R_f C_f = R_1 (C_i + C_x)$  in modo da realizzare lungo l'anello una partizione compensata. In altre parole, l'aggiunta di  $C_f$  apporta uno zero che esattamente compensa il polo introdotto da  $(C_i + C_x)$ .

Questo ultimo esempio ci consente di introdurre un'ulteriore precisazione circa gli effetti delle compensazioni. Se l'anello è compensato introducendo reti o elementi opportuni nel blocco di andata, il trasferimento ideale del sistema resta inalterato. Detto in altri termini, si modifica la banda del circuito ma là dove il guadagno d'anello è sufficientemente alto il trasferimento resta pari a  $1/F(s)$ . Se invece si interviene sul blocco di reazione, si modifica anche  $F(s)$  e non è detto che ciò sia accettabile. Per esempio nel caso di Fig.12.17b la funzione di trasferimento  $T(s)$  cambia drasticamente andamento a causa dell'introduzione di  $C_f$ .

## 12.9 INSTABILITÀ UTILI : L'OSCILLATORE SINUSOIDALE

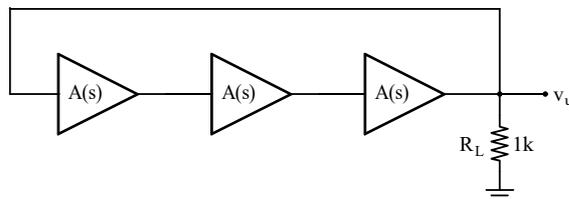
Commentando la Fig.12.11 abbiamo visto come, aumentando opportunamente il valore di  $G_{\text{loop}}(0)$ , i poli del circuito reazionato diventano immaginari puri, con coefficiente  $\omega$  pari al valore dell'intersezione del luogo delle radici con l'asse delle ordinate. Un circuito con due poli immaginari puri reagisce ad una qualunque sollecitazione in ingresso (anche solo il rumore sempre presente in un circuito) con una oscillazione sinusoidale pura di frequenza pari a  $\omega=2\pi f_{\text{osc}}$ . L'oscillazione sinusoidale si instaura alla pulsazione  $\omega$  perchè solo a questa pulsazione il guadagno di anello è esattamente pari a 1 e lo sfasamento totale pari a  $360^\circ$ . Queste due condizioni, necessarie per sostenere una oscillazione in un amplificatore reazionato, sono dette **Criterio di Barkhausen**, dal nome del fisico tedesco che lo propose nel 1921. La situazione descritta è sfruttata tutte le volte che si desidera realizzare un oscillatore armonico con dei componenti elettronici.

Poichè alla frequenza di oscillazione il guadagno dell'anello è unitario, nessuna della proprietà stabilizzanti dei circuiti reazionati è più presente. In particolare la stabilità del guadagno del circuito è di nuovo affidata unicamente allo stadio di andata e non più stabilizzata dalla rete di reazione.

**12.26** Si consideri il circuito della figura seguente, costituito da tre amplificatori di tensione invertenti ed ideali, collegati in cascata e reazionati. Si supponga che la funzione di trasferimento di ciascun amplificatore sia del tipo:

$$A(s) = -\frac{A_0}{1 + s\tau} \quad \text{con } \tau = 27.6\mu\text{s}.$$

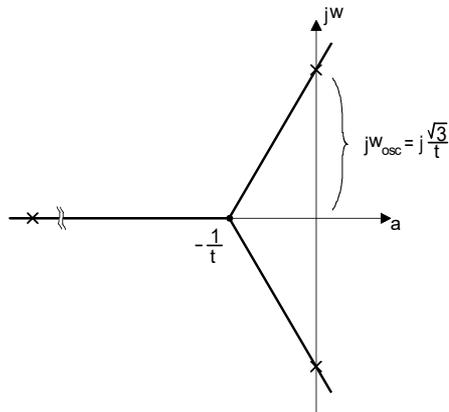
- Disegnare il luogo delle radici.
- Determinare il valore del guadagno di tensione  $A_0$  dell'amplificatore per cui la rete presenti una coppia di poli coniugati immaginari puri ed il valore della corrispondente frequenza di oscillazione del circuito.



(a) - Il guadagno di anello del circuito è

$$G_{\text{loop}}(s) = -\frac{A_0^3}{(1 + s\tau)^3},$$

a cui corrisponde il luogo delle radici riportato nella figura seguente:



Aumentando l'amplificazione  $A_0$ , i poli del circuito migrano lungo i tre rami. Un polo rimane reale negativo, con costante di tempo breve. Questo polo si manifesta solo all'accensione dell'oscillatore, contribuendo unicamente al transitorio iniziale. Gli altri due poli si muovono verso l'asse immaginario.

(b) - La pulsazione di oscillazione corrisponde all'ordinata dei punti in cui il luogo interseca l'asse immaginario. Semplici considerazioni geometriche portano ad ottenere

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{1}{\tau} \cdot \text{tg}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{\tau}.$$

Se  $\tau=27.6\mu\text{s}$ , la frequenza di oscillazione è  $f_{\text{osc}}=10\text{kHz}$ .

Il guadagno in continua  $A_0$  degli amplificatori, necessario per portare i due poli sull'asse immaginario, si ottiene imponendo che sia soddisfatta la relazione  $1 - G_{\text{loop}}(s)=0$  per  $s=j\omega_{\text{osc}}$ , ovvero

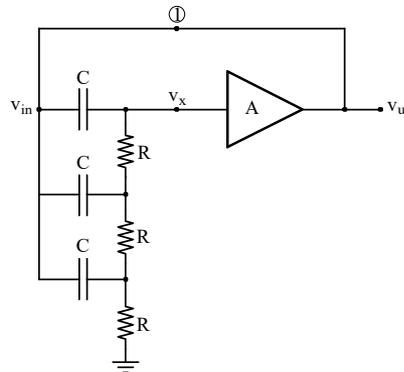
$$|G_{\text{loop}}(s)| = \frac{|1/\tau|^3}{|s + 1/\tau|^3} \cdot A_0^3 = 1$$

Con riferimento alla costruzione grafica della figura si ottiene  $A_0^3=8$ , e quindi  $A_0=2$ . È facile verificare che alla frequenza di oscillazione ogni singolo amplificatore amplifica  $A_0/2$

$$|T(j\omega_{osc})| = \frac{A_0}{|1 + j\frac{\sqrt{3}}{\tau}\tau|} = \frac{A_0}{2}$$

e che quindi il valore  $A_0^3=8$  fa sì che il segnale sinusoidale alla frequenza di oscillazione non subisca attenuazioni nel percorrere tutto l'anello, ma solo uno sfasamento di  $360^\circ$  ( $180^\circ$  dovuto al segno della reazione e  $180^\circ$  dovuto ai tre poli).

**12.27** Si consideri il circuito oscillante riportato nella figura accanto in cui, a valle della rete RC, si ha un disaccoppiatore ideale di tensione con trasferimento  $A=0.98$ , indipendente dalla frequenza. Determinare la pulsazione di oscillazione del sistema.



Girando lungo l'anello di reazione si verifica che il circuito è reazionato positivamente. Si valuti il guadagno d'anello. Disegnando l'andamento dell'ampiezza e della fase del guadagno d'anello si trova che in corrispondenza della pulsazione  $\omega_{osc} = \sqrt{6}/RC$  il guadagno d'anello è pari a 1.014 e la fase zero. Quindi il circuito oscilla.

Si noti come in questo circuito si utilizzi una rete passiva per avere una amplificazione di tensione. Infatti, in corrispondenza della suddetta pulsazione, il trasferimento  $v_x/v_{in}$  ha modulo pari a 30/29. Una rete passiva non può operare ovviamente una amplificazione di potenza elettrica, ma non c'è alcuna ragione di principio perché non possa determinare una amplificazione di tensione.

## 12.10 IL RITARDO DI PROPAGAZIONE DEL SEGNALE LUNGO L'ANELLO

Nell'illustrazione del funzionamento dei circuiti reazionati si è utilizzata una *descrizione propagativa*. Si è immaginato che il segnale applicato al circuito si trasmetta all'uscita attraverso il blocco d'andata e che ritorni quindi, attraverso il ramo di reazione, a sottrarsi all'ingresso nel nodo sommatore. Tuttavia, tutti i circuiti analizzati fino ad ora sono stati trattati a variabili concentrate e quindi il ritardo di propagazione lungo i collegamenti è stato sempre trascurato. Si è implicitamente supposto che il segnale percorra l'anello in un tempo infinitesimo. Anche per quanto riguarda il funzionamento degli elementi attivi, si è sempre fatto riferimento ai modelli a parametri concentrati introdotti nel Capitolo 1, trascurando i ritardi di propagazione finiti che il segnale subisce nell'attraversare i componenti.

In relazione ai circuiti reazionati si deve considerare che un ritardo di propagazione finito del segnale lungo l'anello di reazione determina un contributo addizionale allo sfasamento e quindi potrebbe rendere problematica la stabilità del circuito. Ricordando che ad un ritardo  $\tau$  corrisponde l'operatore  $e^{-s\tau}$  nel dominio della trasformata di Laplace, l'angolo di sfasamento  $\theta$ , per ogni frequenza  $\omega$ , è dato da:

$$e^{-s\tau} = e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} \quad \rightarrow \quad \theta = \omega\tau . \quad (8.14)$$

Il termine  $e^{-\alpha\tau}$  rende conto soltanto di un'eventuale attenuazione presente lungo l'anello. Le (8.14) mettono in evidenza come, per una data pulsazione  $\omega$  del segnale, lo sfasamento aumenta all'aumentare del tempo di propagazione  $\tau$  (e quindi della lunghezza del percorso dell'anello). Il tempo  $\tau$  è dell'ordine della lunghezza del percorso divisa per la velocità della luce nel dielettrico contiguo ai conduttori. Fissate le dimensioni del circuito, lo sfasamento aumenta all'aumentare della frequenza del segnale. Di questo sfasamento se ne può tener conto direttamente in fase di valutazione della fase del guadagno d'anello sommando il contributo  $-\omega\tau$  alla fase determinata dai poli e dagli zeri

$$\varphi = \arg[\gamma] + \arg[j\omega - z_1] \dots - \arg[j\omega - p_1] - \omega\tau .$$

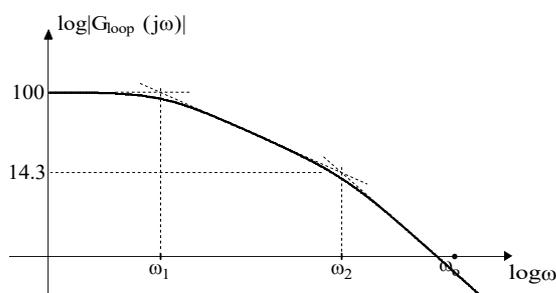
**12.28** Si consideri un circuito reazionato con guadagno d'anello dato da:

$$G_{loop}(s) = \frac{G_{loop}(0)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

con  $G_{loop}(0) = -100$ ,  $\tau_1 = 70\text{ns}$  e  $\tau_2 = 10\text{ns}$ .

- a) Determinare il margine di fase trascurando i ritardi di propagazione.  
 b) Assumendo una velocità di propagazione del segnale di circa  $8\text{ns/m}$ , calcolare quale può essere la lunghezza massima dell'anello di reazione del circuito per evitare che il sistema oscilli.

(a) - In figura è riportato l'andamento del modulo del guadagno d'anello. Il primo polo interviene per una pulsazione  $\omega_1 = 14.3\text{Mrad/s}$  ( $f_1 = 2.3\text{MHz}$ ), il secondo per  $\omega_2 = 100\text{Mrad/s}$  ( $f_2 = 15.9\text{MHz}$ ).



Per pulsazioni comprese tra  $\omega_1$  ed  $\omega_2$  il prodotto guadagno-banda,  $|G_{loop}(\omega)| \cdot \omega$ , è costante. Quindi il guadagno d'anello alla pulsazione  $\omega_2$  è pari a  $|G_{loop}(\omega)| \cdot \omega_1 / \omega_2 = 14.3$ . Invece per pulsazioni superiori ad  $\omega_2$ , il diagramma di Bode ha una pendenza pari a  $-40\text{dB/decade}$  ed è il prodotto  $|G_{loop}(\omega)| \cdot \omega^2$  ad essere costante. Quindi il valore della pulsazione  $\omega_0$ , per cui il guadagno d'anello attraversa l'asse a  $0\text{dB}$ , è data da

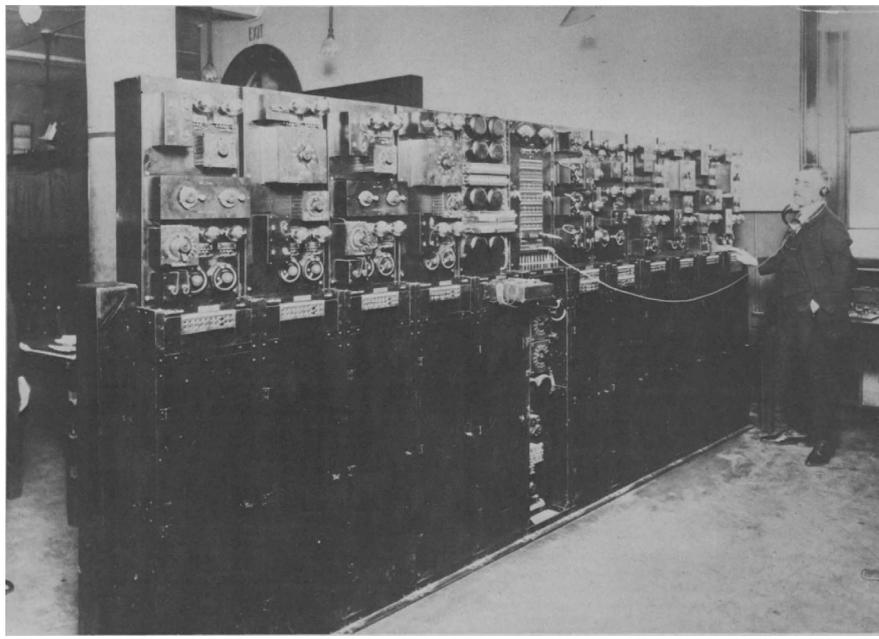
$$\omega_0^2 = |G_{loop}(\omega_2)| \cdot \omega_2^2.$$

Così si ottiene  $\omega_0 = 378\text{Mrad/s}$ . Non considerando il contributo del ritardo di propagazione, la fase  $\varphi(\omega_0)$  del guadagno d'anello è pari a  $17^\circ$ , ovvero a  $0.297\text{rad}$ . Il margine di fase si annulla se il ritardo di propagazione,  $\tau$ , è tale che  $\omega_0 \tau = 0.297\text{rad}$ . Si trova  $\tau = 786\text{ps}$  e la corrispondente lunghezza dell'anello di reazione è  $9.8\text{cm}$ . Si noti che se il sistema avesse poli a frequenza più alta, anche  $\omega_0$  sarebbe corrispondentemente più alta e le dimensioni massime del circuito diminuirebbero proporzionalmente. Ecco perché i circuiti che operano a frequenze elevate devono essere realizzati con montaggi compatti o essere integrati sullo stesso substrato di materiale semiconduttore.

**12.29**

*Il primo circuito elettronico reazionato proposto da H. S. Black era costituito da vari stadi amplificatori in serie e da una rete di reazione. Dato l'uso delle valvole e delle tecniche di montaggio dell'epoca, l'amplificatore di andata occupava tutta una stanza e il ramo di reazione era lungo parecchi metri. Stimare la massima frequenza a cui H.S. Black poteva pensare di far funzionare il suo circuito.*

*Qui sotto un'immagine di sistema di amplificatori per telecomunicazione di quel tempo, che dà l'idea delle dimensioni degli apparati di allora.*



Supponendo che la lunghezza dell'intero anello di reazione fosse 10m, ed assumendo per la luce la velocità in aria, il ritardo di propagazione del segnale lungo l'anello era certamente maggiore di 33ns. La frequenza a cui questo ritardo corrisponde ad uno sfasamento di  $-180^\circ$  è  $f_0=16\text{MHz}$ . In effetti la banda del circuito di H.S.Black era molto minore.

*Concludendo questo dodicesimo capitolo hai concluso la tua dodicesima ed ultima fatica. Ti senti un Ercole ?*

Come dodicesima e ultima fatica, Euristeo chiese ad Ercole di portargli Cerbero, il cane mostruoso che faceva la guardia all’Ade, il regno dei morti. Cerbero aveva tre teste di cane, una coda di drago e dalla sua schiena spuntavano mille serpenti, pronti a mordere e avvelenare chiunque gli si fosse avvicinato. La sola vista dell’animale si diceva che avrebbe pietrificato gli sfortunati.

Per raggiungere l’Ade Ercole dovette prima purificarsi andando ad Eleusi, presso Atene, e venne iniziato ai misteri eleusini che propiziavano la discesa nell’aldilà e che gli consentirono di convincere Caronte a traghettarlo al di là dello Stige.

Le ombre dei morti, non appena lo videro fuggirono, ad eccezione di Medusa, la gorgone. Ercole stava per affrontarla in battaglia ma si accorse che si trattava soltanto di un fantasma e così proseguì il suo viaggio. Dopo vari incontri che lo sottopongono a diverse prove, Ercole raggiunge infine Ade che gli permette di portare via Cerbero a patto di non usare armi per catturarlo. Ercole allora affrontò Cerbero protetto solo dalla pelle di leone che portava come un mantello e, con un balzo, fu addosso alla bestia e le strinse il collo fino a soffocarla. La prese, risalì l’Ade e la portò da Euristeo per dimostrargli di aver compiuto anche l’ultima fatica. Quando costui vide il mostro si nasconde impaurito in un otre e ordinò ad Ercole di riportare il cane negli Inferi, cosa che Ercole effettivamente fece.

Le dodici fatiche erano così compiute ed Ercole era di nuovo libero ed era riuscito a placare l’ira di Era.

*E così siamo giunti alla fine del corso e **dovreste essere pronti anche per un esame ORALE.***

*“Quando si scuote un setaccio restano i rifiuti; così quando un uomo discute ne appaiono i difetti.*

*I vasi del ceramista li mette alla prova la fornace, così il modo di ragionare è il banco di prova per un uomo.*

*Il frutto dimostra come è coltivato un albero, così la parola rivela i pensieri del cuore.*

*Non lodare nessuno prima che abbia parlato, poiché questa è la prova degli uomini”*

Siracide 27, 5-8

**Buona carriera da raffinati pensatori.**